

CHỦ ĐỀ 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

VẤN ĐỀ 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I. Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D, với D là một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng.

1. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
2. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên D nếu $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

II. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên D thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$
2. Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên D thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$

III. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

1. Định lý 1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a, b]$ và có đạo hàm trên khoảng (a, b) thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho: $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

2. Định lý 2. Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng D

1. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số đồng biến trên D
2. Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in D$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thuộc D thì hàm số nghịch biến trên D
3. Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in D$ thì hàm số không đổi trên D

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$

***Phương pháp :** Xét chiều biến thiên của hàm số $y = f(x)$

1. Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$
2. Tính $y' = f'(x)$ và xét dấu y' (Giải phương trình $y' = 0$)
3. Lập bảng biến thiên từ đó suy ra chiều biến thiên của hàm số

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số đơn điệu trên một khoảng cho trước

Chú ý: • Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

- nếu $a = 0$ thay vào hs và kết luận
- nếu $a \neq 0$, hs đồng biến trên R khi $\begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$
- nếu $a \neq 0$, hs nghịch biến trên R khi $\begin{cases} a < 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases}$

• Hàm $y = \frac{ax + b}{cx + d}$ $\begin{cases} \text{đồng biến trên tung khoảng xác định khi } ad - bc > 0 \\ \text{nghịch biến trên tung khoảng xác định khi } ad - bc < 0 \end{cases}$

PHẦN III: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1 Trong các hàm số sau , hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng (1 ; 3)

- A. $y = \frac{x-3}{x-1}$ B. $y = \frac{x^2 - 4x + 8}{x-2}$ C. $y = 2x^2 - x^4$ D. $y = x^2 - 4x + 5$

Câu 2: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ là: Chọn 1 câu đúng.

- A. $(-\infty; -1)$ B. $(-1; 3)$ C. $(3; +\infty)$ D. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$

Câu 3: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 - 3$ là: Chọn 1 câu đúng.

- A. $(-\infty; -\sqrt{3})$ và $(0; \sqrt{3})$ B. $(0; -\frac{\sqrt{3}}{2})$ và $(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty)$ C. $(\sqrt{3}; +\infty)$ D. $(-\sqrt{3}; 0)$ và $(\sqrt{3}; +\infty)$

Câu 4. Kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số $y = \frac{2x+1}{x+1}$ là đúng? Chọn 1 câu đúng.

- A. Hàm số luôn đồng biến trên R.
- B. Hàm số luôn nghịch biến trên $R \setminus \{-1\}$
- C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$
- D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng

Câu 5: Cho hàm số $y = 2x + 1 - \frac{1}{x-1}$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- A. Hàm số đơn điệu trên R
- B. Hàm số nghịch biến $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- C. Hàm số đồng biến $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- D. Các mệnh đề trên đều sai

Câu 6: Khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ là: Chọn 1 câu đúng.

- A. $(-\infty; 1)$
- B. $(0; 1)$
- C. $(1; 2)$
- D. $(1; +\infty)$

Câu 7 Hàm số $y = x - 2\sqrt{x-1}$ nghịch biến trên khoảng nào ?

- A. $(2; +\infty)$
- B. $(1; +\infty)$
- C. $(1; 2)$
- D. Không phải các câu trên

Câu 8: Cho hàm số $y = m.x^3 - 2x^2 + 3mx + 2016$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số

- + luôn đồng biến ? A. $[2/3; +\infty)$ B. $(-\infty; -2/3]$ C. $(-2/3; 0) \cup (0; 2/3)$ D. $[-2/3; 2/3]$
- + luôn nghịch biến ? A. $[2/3; +\infty)$ B. $(-\infty; -2/3]$ C. $(-2/3; 0) \cup (0; 2/3)$ D. $[-2/3; 2/3]$.

Câu 9: Cho hàm số $y = mx^3 - 3mx^2 + 3x + 1 - m$.

- + hàm số đồng biến trên R khi A. $0 \leq m \leq 1$ B. $m \geq 1$ C. $m < 0$ D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$
- + hàm số nghịch biến trên R khi A. $0 \leq m \leq 1$ B. $m = \Phi$ C. $m < 0$ D. $\begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$

Câu 10: Cho hàm số $y = x^3 + 2mx^2 - 3mx + 2017$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số luôn đồng biến. A. $-\frac{9}{4} < m < 0$. B. $-\frac{9}{4} \leq m \leq 0$. C. $m < -\frac{9}{4}$ hoặc $m > 0$. D. $m \leq -\frac{9}{4}$ hoặc $m \geq 0$.

Câu 11: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $m=12$ B. $m \leq 12$ C. $m \geq 12$ D. $m=-12$

Câu 12: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 2x + 1$. Với giá trị nào của m hàm số đồng biến trên R

- A. $m \geq 3$ B. $m \leq 3$ C. $-\sqrt{6} \leq m \leq \sqrt{6}$ D. Không tồn tại giá trị m

Câu 13 Cho hàm số $y = 2x^4 - 4x^3 + 3$ Số điểm cực trị của hàm số là:

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{4})$.

- A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m \leq 2$. B. $m \leq 0$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $m \geq 2$.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến trên R. Tìm tập các giá trị của x để $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(1)$.

- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; 0) \cup (0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

VẤN ĐỀ 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

I.Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $D \subset R$ và $x_0 \in D$

1. x_0 được gọi là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b) \subset D$ và $f(x) < f(x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.
2. x_0 được gọi là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ nếu tồn tại một (a,b) chứa điểm x_0 sao cho $(a,b) \subset D$ và $f(x) > f(x_0), \forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$.
- 3.Điểm cực đại và điểm cực tiểu của hàm số được gọi chung là điểm cực trị của hàm số; Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là cực trị của hàm số.

II.Điều kiện cần để hàm số có cực trị : Giả sử hàm số $y = f(x)$ có cực trị tại x_0 . Khi đó, nếu $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

III.Điều kiện đủ để hàm số có cực trị :

1.Định lý 1. (Dấu hiệu 1 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng (a,b) chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng (a, x_0) và (x_0, b) . Khi đó :

- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0
- + Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại x_0

2.Định lý 2. (Dấu hiệu 2 để tìm cực trị của hàm số)

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng (a,b) chứa điểm $x_0, f'(x_0) = 0$ và $f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 . Khi đó: + Nếu $f''(x_0) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0
+ Nếu $f''(x_0) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

PHẦN II. MỘT SỐ DẠNG TOÁN

Dạng 1. Tìm cực trị của hàm số

***Phương pháp 1. (Quy tắc 1) Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$**

- 1.Tìm tập xác định của hàm số
- 2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm thuộc tập xác định
- 3.Lập bảng biến thiên từ đó suy ra các điểm cực trị của hàm số.

***Phương pháp 2. (Quy tắc 2) Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$**

- 1.Tìm tập xác định của hàm số
- 2.Tính $f'(x)$ và giải phương trình $f'(x) = 0$ tìm nghiệm $x_i (i = 1, 2, 3, \dots)$ thuộc tập xác định
- 3.Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$
- 4.Kết luận: + Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i
+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i

Dạng 2. Tìm điều kiện của tham số để hàm số có cực trị thỏa mãn điều kiện cho trước

Chú ý: • Hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$ có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta_y > 0 \end{cases}$

• Hàm bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c (a \neq 0)$ $\begin{cases} \text{có ba cực trị} \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt} \\ \text{có một cực trị} \Leftrightarrow y' = 0 \text{ có một nghiệm} \end{cases}$

PHẦN III: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Khẳng định nào sau đây là đúng về hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 2$:

- A. Đạt cực tiểu tại $x = 0$ B. Có cực đại và cực tiểu C. Có cực đại và không có cực tiểu D. Không có cực trị.

Câu 2: Trong các khẳng định sau về hàm số $y = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$, khẳng định nào đúng?

- A. Hàm số có điểm cực tiểu là $x = 0$ B. Hàm số có cực tiểu là $x = 1$ và $x = -1$
C. Hàm số có điểm cực đại là $x = 0$ D. Hàm số có cực tiểu là $x = 0$ và $x = 1$

Câu 8: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{x}{x+2}$ trên nửa khoảng $(-2; 4]$ bằng. Chọn 1 câu đúng.

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{4}{3}$

Câu 9: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x + 1 + \frac{1}{2x+1}$ trên đoạn $[1; 2]$ bằng. Chọn 1 câu đúng.

- A. $\frac{26}{5}$ B. $\frac{10}{3}$ C. $\frac{14}{3}$ D. $\frac{24}{5}$

Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0; +\infty)$ bằng

- A. 0 B. 1 C. 2 D. $\sqrt{2}$

Câu 11: +) giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$ là

- A. $M=2\sqrt{2}, m=2$ B. $M=2\sqrt{2}, m=0$ C. $M=2, m=1$ D. $M=2, m=0$

+ giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = 2^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}}$ là

- A. $M=4^{\sqrt{2}}, m=4$ B. $M=4^{\sqrt{2}}, m=1$ C. $M=4, m=2$ D. $M=4, m=1$

+ giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = 4^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} - 14.2^{\sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}} + 8$ là

- A. $M = -32, m = -41$ B. $M = -5, m = -41$ C. $M = -16, m = -32$ D. $M = -5, m = -32$

Câu 12: +) giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ là

- A. $M = \sqrt{2}, m = -1$ B. $M = 2\sqrt{2}, m = -1$ C. $M = 2, m = 1$ D. $M = 2, m = 0$

+ giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = 3^{x + \sqrt{1-x^2}}$ là

- A. $M = 3^{\sqrt{2}}, m = 1/3$ B. $M = 3^{\sqrt{2}}, m = 1$ C. $M = 3, m = 2$ D. $M = 3, m = 1/3$

+ giá trị lớn nhất M và nhỏ nhất m của hàm số $y = 9^{x + \sqrt{1-x^2}} - 8.3^{x + \sqrt{1-x^2}} + 4$ là

- A. $M = 13/9, m = -12$ B. $M = 7/9, m = -12$ C. $M = 1, m = -12$ D. $M = 2, m = -12$

Câu 13: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1; 1]$ bằng. Chọn 1 câu đúng.

- A. 9 B. 3 C. 1 D. 0

Câu 14: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{1-x^2}$ bằng. Chọn 1 câu đúng.

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. Số khác

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ bằng.

- A. $\frac{23}{27}$ B. $\frac{1}{27}$ C. 5 D. 1

Câu 16: Cho hàm số $y = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ bằng

- A. -1 B. 1 C. 3 D. 7

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x + \sqrt{2} \cos x$ trên đoạn $[0; \frac{\pi}{2}]$ bằng.

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\pi}{4} + 1$ D. $\frac{\pi}{2}$

Câu 18: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^2 - 4x - 5|$ trên đoạn $[-2; 6]$ bằng.

- A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

Câu 19: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[1; 2]$ bằng -2. khi đó giá trị m bằng

- A. $m=1$ B. $m=2$ C. $m=3$ D. $m=4$

Câu 20. Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6$, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 3]$ bằng 2 khi

- A. $m = \frac{31}{27}$ B. $m = 1$ C. $m = 2$ D. $m > \frac{3}{2}$

VẤN ĐỀ 4. ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Đường tiệm cận đứng .

Đường thẳng (d): $x = x_0$ được gọi là đường tiệm cận đứng của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty \text{ hoặc } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$

Hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$ hoặc $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$

2. Đường tiệm cận ngang .

Đường thẳng (d): $y = y_0$ được gọi là đường tiệm cận ngang của đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$

PHẦN II: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-2}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai. Chọn 1 câu sai.

- A. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận đứng $x = 2$. B. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận ngang $y = 1$
 C. Tâm đối xứng là điểm $I(2 ; 1)$ D. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận đứng $x = 1$

Câu 2: Số đường tiệm cận của hàm số $y = \frac{1+x}{1-x^2}$ là. Chọn 1 câu đúng.

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 3: Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số nào sau đây? Chọn 1 câu đúng.

- A. $y = \frac{1+x}{1-x}$ B. $y = \frac{2x-2}{x^2-1}$ C. $y = \frac{x^2-1}{x-1}$ D. $y = \frac{x^2-3x+2}{x-1}$

Câu 4: Đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số nào sau đây? Chọn 1 câu đúng.

- A. $y = \frac{1+x}{1-2x}$ B. $y = \frac{2x-2}{x+2}$ C. $y = \frac{x^2+2x+2}{1+x}$ D. $y = \frac{2x^2+3}{2-x}$

Câu 5: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x-2}$ là. Chọn 1 câu đúng.

- A. 1 B. 2 C. 0 D. 3

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai. Chọn 1 câu sai.

- A. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận đứng $x = -1, x = 1$. B. Đồ thị hàm số trên có tiệm cận ngang $y = 1, y = -1$
 C. Đồ thị hàm số trên không có tiệm cận ngang. D. Đồ thị hàm số trên chỉ có hai đường tiệm cận.

Câu 7: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2-3x}}{x^2-9}$ có mấy tiệm cận đứng? A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Câu 8: Đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1}$ có mấy tiệm cận? A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.

Câu 9: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x^2+2x-x}}{x-2}$ là. Chọn 1 câu đúng. A.1 B.2 C.0 D.3

Câu 10: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3-1}{x^4-1}$ là. Chọn 1 câu đúng. A.1 B.2 C.0 D.3

Câu 11: Giá trị của m để tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+m}$ đi qua điểm $M(2 ; 3)$ là.

- Chọn 1 câu đúng. A. 2 B. -2 C. 3 D. 0

Câu 12: tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{mx^2-3x+2}{x^2-2x+m}$

- +) có ba đường tiệm cận ? A. $m < 1$ B. $m > 1$ C. $m = 1$ D. $m = 0$
 +) có duy nhất một tiệm cận? A. $m < 1$ B. $m > 1$ C. $m = 1$ D. $m = 0$

VẤN ĐỀ 5. NHẬN DẠNG BẢNG BIẾN THIÊN VÀ ĐỒ THỊ

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Dạng đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$)

	$a > 0$	$a < 0$
Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt		
Phương trình $y' = 0$ có nghiệm kép		
Phương trình $y' = 0$ vô nghiệm		

2. Dạng đồ thị hàm trùng phương bậc bốn $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$)

Hệ số a	$a > 0$	$a < 0$
Pt $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt		
Pt $y'=0$ có một nghiệm		

3. Dạng đồ thị hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)

$D = ad - bc > 0$	$D = ad - bc < 0$

PHẦN II: BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	
y	$+\infty$			3		$-\infty$

- A. $y = x^3 - 3x^2 - 1$ B. $y = -x^3 + 3x^2 - 1$ C. $y = x^3 + 3x^2 - 1$ D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$

Câu 2: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

X	$-\infty$	1	$+\infty$		
y'	+	0	+		
y	$-\infty$		1		$+\infty$

- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ B. $y = -x^3 + 3x^2 - 3x$ C. $y = x^3 + 3x^2 - 3x$ D. $y = -x^3 - 3x^2 - 3x$

Câu 3: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

X	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'	-	0	+	0	-	0	+		
y	$+\infty$		-4		-3		-4		$+\infty$

- A. $y = x^4 - 3x^2 - 3$ B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$ C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$ D. $y = x^4 + 2x^2 - 3$

Câu 4: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

X	$-\infty$	0	$+\infty$		
y'	-	0	+		
y	$+\infty$		1		$+\infty$

- A. $y = x^4 - 3x^2 + 1$ B. $y = -x^4 + 3x^2 + 1$ C. $y = x^4 + 3x^2 + 1$ D. $y = -x^4 - 3x^2 + 1$

Câu 5: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$	
y'	+		+	
y		$+\infty$		2

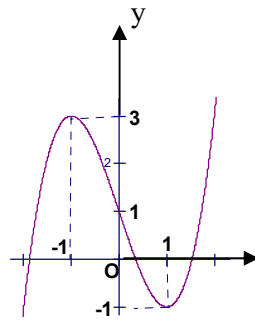
- A. $y = \frac{2x+1}{x+1}$ B. $y = \frac{x-1}{2x+1}$ C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$ D. $y = \frac{x+2}{1+x}$

Câu 6: Bảng biến thiên sau đây là của hàm số nào? Chọn 1 câu đúng.

x	$-\infty$	2	$+\infty$				
y'	-		-				
y	1		$+\infty$		$-\infty$		1

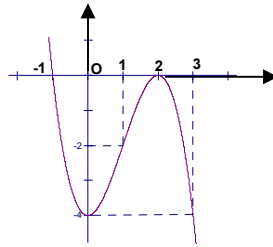
- A. $y = \frac{2x+1}{x-2}$ B. $y = \frac{x-1}{2x+1}$ C. $y = \frac{x+1}{x-2}$ D. $y = \frac{x+3}{2+x}$

Câu 7: Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



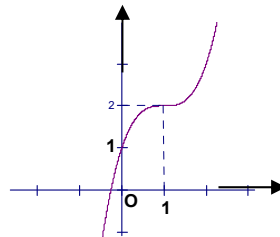
- A. $y = x^3 - 3x - 1$ B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ C. $y = x^3 - 3x + 1$ D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$

Câu 8: Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



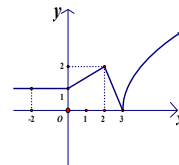
- A. $y = x^3 - 3x - 4$ B. $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ C. $y = x^3 - 3x - 4$ D. $y = -x^3 - 3x^2 - 4$

Câu 9: Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?



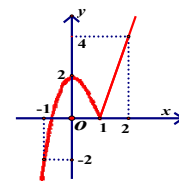
- A. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ B. $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ C. $y = x^3 - 3x + 1$ D. $y = -x^3 - 3x^2 - 1$

Câu 10: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị hàm số như hình vẽ. Đồ thị hàm số có mấy điểm cực tiểu?



- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

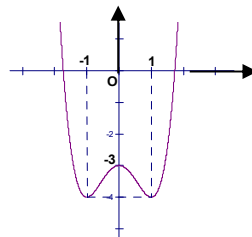
Câu 11: Trong hệ tọa độ Oxy, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị của x để hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1; 2]$.



- A. 1. B. 2. C. -2. D. 0.

Câu 12: Đồ thị sau đây là của hàm số nào ?

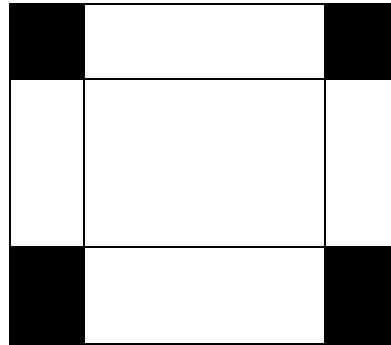
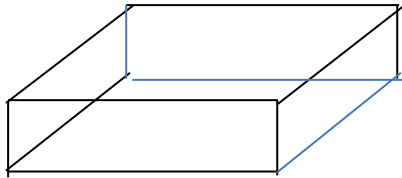
- A. $y = x^4 - 3x^2 - 3$ B. $y = -\frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 3$ C. $y = x^4 - 2x^2 - 3$ D. $y = x^4 + 2x^2 - 3$



VẤN ĐỀ 7. MỘT SỐ BÀI TOÁN LIÊN HỆ THỰC TẾ

Câu 1. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.

- A. $x=6$. B. $x=3$. C. $x=2$. D. $x=4$.



Câu 2: Một nhà máy cần sản xuất một thùng đựng nước bằng tôn có dạng hình hộp đứng, có đáy là hình vuông, không có nắp, có thể tích $4m^3$. Tính kích thước của bể sao cho tốn ít vật liệu nhất.

- A. Các cạnh bằng $\sqrt[3]{4}$ m. B. Cạnh đáy bằng 2m, chiều cao bằng 1m.
 C. Cạnh đáy bằng 1m, chiều cao bằng 2m. D. Cạnh đáy bằng 3m, chiều cao bằng $\frac{4}{9}$ m.

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^3 + 9t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

- A. 216(m/s). B. 30(m/s). C. 400(m/s). D. 54(m/s).

Câu 4: trong các hình chữ nhật có cùng chu vi là 16 cm thì hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là:

- A. 16 cm^2 B. 8 cm^2 C. 32 cm^2 D. 15 cm^2

Câu 5: trong các hình chữ nhật có cùng diện tích là 36 cm^2 thì hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất là:

- A. 24cm B. 26cm C. 20cm D. 18cm.

CHỦ ĐỀ 2: THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

I - KIẾN THỨC LIÊN QUAN

1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng

Để chứng minh $\Delta \perp a$ ta sử dụng một trong các cách sau

- | | |
|--|---|
| 1) CM $\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp a$ | 2) CM $\begin{cases} \Delta \perp b \\ a // b \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp a$ |
| 3) CM $\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ a // (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp a$ | 4) CM $\begin{cases} a' \text{ là hình chiếu của } a \text{ trên } (\alpha) \\ \text{Trong } (\alpha) : \Delta \perp a' \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp a$ |

2. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

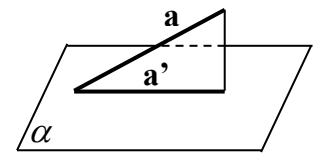
Để chứng minh $\Delta \perp (\alpha)$ ta sử dụng một trong các cách sau

- | | |
|--|---|
| 1) CM $\begin{cases} \Delta \perp a \subset (\alpha) \\ \Delta \perp b \subset (\alpha) \\ a \text{ cắt } b \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$ | 2) CM $\begin{cases} (P) \perp (\alpha) \\ (Q) \perp (\alpha) \\ (P) \cap (Q) = \Delta \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$ |
| 3) CM $\begin{cases} (P) \perp (\alpha) \\ (P) \cap (\alpha) = a \\ \text{Trong } (P) : \Delta \perp a \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$ | 4) CM $\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ \Delta // a \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$ |

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

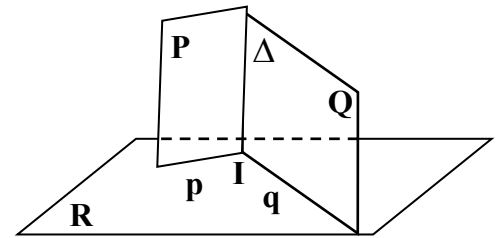
Đnghĩa: $(a, (\alpha)) = (a, a')$ với a' là hình chiếu vuông góc của a trên (P)

Chú ý: $0^\circ \leq (a, (\alpha)) \leq 90^\circ$



4. Góc giữa hai mặt phẳng

- **Đnghĩa:** $((P), (Q)) = (a, b)$ với $a \perp (P)$ và $b \perp (Q)$.
- **Cách xác định góc giữa hai mặt phẳng cắt nhau (P) và (Q)**
 - ✓ **Bước 1:** Xác định giao tuyến Δ của (P) và (Q)
 - ✓ **Bước 2:** Từ một điểm I bất kì trên Δ dựng: đường thẳng p nằm trong (P) và $\perp \Delta$
đường thẳng q nằm trong (Q) và $\perp \Delta$



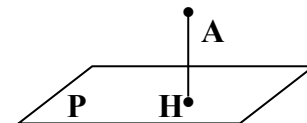
Khi đó: $((P), (Q)) = (p, q)$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là

$d(A, (P)) = AH$

Trong đó H là hình chiếu vuông góc của A trên (P)



6. Công thức tính thể tích khối đa diện

• **Thể tích khối chóp:** $V = \frac{1}{3} h.S_{đáy}$ (h là chiều cao của hình chóp)

• **Thể tích khối lăng trụ:** $V = h.S_{đáy}$ (h là chiều cao của lăng trụ)

• **Note:** Cho tứ diện S.ABC với A' thuộc SA, B' thuộc SB, C' thuộc SC (A', B', C' không trùng với S).

Khi đó, ta có: $\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}} = \frac{SA'}{SA} \frac{SB'}{SB} \frac{SC'}{SC}$

II – PHẦN BÀI TẬP TỰ LUẬN

THỂ TÍCH KHỐI CHÓP

Dạng 1: Khối chóp có cạnh bên vuông góc với đáy

Bài 1. Tính thể tích khối chóp tam giác SABC có đường cao SA vuông góc với đáy ABC và tam giác ABC vuông tại B. Biết SA=3a, AB=4a, AC=5a

Đs: $V = 6a^3$

Bài 2. Tính thể tích khối chóp SABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật AB=a, BC=3a, $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa SD và (ABCD) bằng 45^0 .

Đs: $V = 3a^3$

Bài 3. Tính thể tích khối chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và đường cao SA vuông góc với đáy ABC, mặt bên (SBC) tạo với mặt đáy một góc 30^0

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{24}$

Dạng 2: Khối chóp có một mặt bên vuông góc với đáy

Bài 1. Tính thể tích khối chóp tam giác SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, BC=a, $SB=SC=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, (SBC) vuông góc với (ABC) và mặt bên (SAB) tạo với mặt đáy một góc 60^0

Đs: $V = \frac{a^3}{18}$

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD có cạnh đáy ABCD là hình vuông cạnh bằng 3a. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và vuông góc với mặt đáy. Gọi H là trung điểm của AB

1. Tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.
2. Gọi M là điểm nằm trên AD sao cho $AM = \frac{1}{4}AD$. Tính $V_{S.ABM}$ theo a.

Đs: 1. $V = \frac{9a^3 \sqrt{3}}{2}$ 2. $V = \frac{9a^3 \sqrt{3}}{16}$

Dạng 3: Khối chóp đều

Bài 1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng a.

1. Tính thể tích khối chóp S.ABC, biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60^0 .
2. Tính thể tích khối chóp S.ABC, biết mặt bên tạo với mặt đáy một góc 30^0 .
3. Tính thể tích khối chóp S.ABC, cạnh bên SA tạo với cạnh đáy AB một góc 45^0 .

Đs: 1. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$ 2. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{72}$ 3. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a. Tính thể tích khối chóp S.ABCD

1. Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60^0 .
2. Biết mặt bên tạo với mặt đáy một góc 30^0 .

Đs: 1. $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{6}$ 2. $V = \frac{a^3 \sqrt{3}}{18}$

Dạng: Khối chóp & phương pháp tỷ số thể tích

Bài 1. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy bằng a, cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$. Gọi K là điểm nằm trên SA sao cho 5AM=SA. Tính tỷ số thể tích giữa khối tứ diện K.ABC và khối chóp S.ABCD.

Đs: 1/10

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD, đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên tạo với đáy góc 60^0 . Gọi M là trung điểm SC. Mặt phẳng đi qua AM và song song với BD, cắt SB tại E và cắt SD tại F. Tính thể tích khối chóp S.AEMF.

Đs: $V = \frac{a^3 \sqrt{6}}{18}$

THỂ TÍCH LĂNG TRỤ

Dạng 1: Khối lăng trụ đứng có chiều cao hay cạnh đáy

Bài 1. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCDA'B'C'D' có cạnh đáy bằng a và đường chéo hợp với mặt đáy góc 30°. Tính thể tích khối lăng trụ

Đs: $V = 125a^3\sqrt{6}$

Bài 2. Cho lăng trụ đứng ABCA'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông tại A, AC = a, $\widehat{BCA} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên (BCC'B') hợp với mặt bên (ACC'A') một góc 30°. Tính thể tích lăng trụ

Đs: $V = a^3\sqrt{6}$

Bài 3. Đáy của lăng trụ đứng tam giác ABC.A'B'C' là tam giác đều. Mặt (A'BC) tạo với đáy một góc 30° và diện tích tam giác A'BC bằng 8. Tính thể tích khối lăng trụ.

Đs: $V = 8\sqrt{3}$

Dạng 2. Khối lăng trụ xiên

Bài 1. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a và điểm A' cách đều các điểm A, B, C. Cạnh bên AA' tạo với mp đáy một góc 60°. Tính thể tích của lăng trụ

Đs: $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

Bài 2. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C' có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a, $AA' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ và hình chiếu của A trên (A'B'C') là trung điểm của B'C'. Tính thể tích của lăng trụ trên.

Đs: $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Bài 3. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$, $AD = \sqrt{7}$. Hai mặt bên (ABB'A') và (ADD'A') lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60°. Tính thể tích khối lăng trụ đó nếu biết cạnh bên bằng 1.

Đs: $V = 3$

III - PHẦN TRẮC NGHIỆM TỔNG HỢP

Câu 1. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. Khối tứ diện đều là khối đa diện đều.
- B. Khối lập phương là khối đa diện đều.
- C. Khối đa diện là phần không gian bên trong được giới hạn bởi một hình đa diện, kể cả hình đa diện đó.
- D. Khối đa diện được giới hạn bởi một hình chóp đều, kể cả hình chóp đều đó là một khối đa diện đều.

Câu 2. Khối đa diện đều loại {4; 3} là:

- A. Khối tứ diện đều
- B. Khối lập phương
- C. Khối chóp tứ giác đều
- D. Khối lăng trụ đều

Câu 3. Cho khối lăng trụ ABCA'B'C' có thể tích là 150 cm^3 . Thể tích khối chóp A'ABC là:

- A. 150 cm^3
- B. 75 cm^3
- C. 50 cm^3
- D. 50 cm^3

Câu 4. Cho khối chóp S.ABC có $SA = a \perp (ABC)$, ΔABC vuông tại B, $AB = BC = a$. Tính thể tích khối chóp.

- A. $\frac{a^3}{6}$
- B. $\frac{a^3}{3}$
- C. $\frac{a^3}{2}$
- D. a^3

Câu 5. Cho khối chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABC biết $SA = a$

- A. $\frac{a^3}{6}$
- B. $\frac{a^3}{3}$
- C. $\frac{a^3}{2}$
- D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$

Câu 6. Cho khối lập phương ABCDA'B'C'D' cạnh a. Tính thể tích khối chóp A'ABCD

- A. $\frac{a^3}{6}$
- B. $\frac{a^3}{3}$
- C. $\frac{a^3}{2}$
- D. a^3

Câu 7. Cho khối chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật tâm O, $AC = 2AB = 2a$, SA vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp S.ABCD biết $SD = a\sqrt{5}$

A. $\frac{a^3\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{a^3\sqrt{15}}{3}$ C. $a^3\sqrt{6}$ D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 8. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Hai mặt phẳng $(SAB), (SAD)$ cùng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SC = a\sqrt{3}$

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. a^3 D. $\frac{a^3}{3}$

Câu 9. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật $AD = 2a, AB = a$. Gọi H là trung điểm của AD , biết $SH \perp (ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết $SA = a\sqrt{5}$.

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{4a^3}{3}$ D. $\frac{2a^3}{3}$

Câu 10. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$. Gọi H là trung điểm cạnh AB biết $SH \perp (ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết tam giác SAB đều

A. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{a^3}{6}$ D. $\frac{a^3}{3}$

Câu 11. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A với $BC = 2a, \widehat{BAC} = 120^\circ$, biết $SA \perp (ABC)$ và mặt (SBC) hợp với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

A. $\frac{a^3}{9}$ B. $\frac{a^3}{3}$ C. $a^3\sqrt{2}$ D. $\frac{a^3}{2}$

Câu 12. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông biết $SA \perp (ABCD), SC = a$ và SC hợp với đáy một góc 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{48}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$ C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{24}$ D. $\frac{a^3\sqrt{2}}{16}$

Câu 13. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật biết rằng $SA \perp (ABCD), SC$ hợp với đáy một góc 45° và $AB = 3a, BC = 4a$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$

A. $20a^3$ B. $40a^3$ C. $10a^3$ D. $30a^3$

Câu 14. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại $A, AC = a, \widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ theo a

A. $a^3\sqrt{6}$ B. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$ D. $\frac{4a^3\sqrt{6}}{3}$

Câu 15. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' xuống (ABC) là trung điểm của AB . Mặt bên $(ACC'A')$ tạo với đáy góc 45° . Tính thể tích khối lăng trụ này

A. $\frac{3a^3}{16}$ B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{a^3}{16}$

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành với $AB = a, AD = 2a, \widehat{BAD} = 60^\circ$, SA vuông góc với đáy, góc giữa SC và đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là V . Tỷ số $\frac{V}{a^3}$ là

A. $2\sqrt{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{7}$ D. $2\sqrt{7}$

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC . Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD . Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN) là

A. Hình tam giác B. Hình tứ giác C. Hình ngũ giác D. Hình lục giác

Câu 18. Đáy của lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ là tam giác ABC vuông cân tại A có cạnh $BC = a\sqrt{2}$ và biết $A'B = 3a$. Tính thể tích khối lăng trụ

A. a^3 B. $a^2\sqrt{2}$ C. $2a^3$ D. $a^3\sqrt{3}$

Câu 19. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên bằng $4a$ và đường chéo $5a$. Tính thể tích khối lăng trụ này

A. $12a^3$ B. $18a^3$ C. $3a^3$ D. $9a^3$

CHỦ ĐỀ 3: MẶT TRÒN XOAY VÀ KHỐI TRÒN XOAY

A – TỔNG HỢP LÝ THUYẾT

I – MẶT CẦU VÀ KHỐI CẦU

1. **Định nghĩa:** Mặt cầu tâm I, bán kính R là $\{M \text{ trong không gian} \mid IM = R\}$

Khối cầu tâm I, bán kính R là $\{M \text{ trong không gian} \mid IM \leq R\}$

2. **Diện tích mặt cầu:** $S = 4\pi R^2$

3. **Thể tích khối cầu:** $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

4. Giao của một mặt cầu với một đường thẳng

Trong không gian cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ

Gọi H là hình chiếu của tâm I trên Δ

- Nếu $IH > R$ thì Δ không có điểm chung với (S).
- Nếu $IH = R$ thì Δ tiếp xúc với (S) tại H (Trong trường hợp này ta nói Δ là tiếp tuyến của (S) tại H)
- Nếu $IH < R$ thì Δ cắt (S) tại hai điểm phân biệt.

5. Giao của một mặt cầu với một mặt phẳng

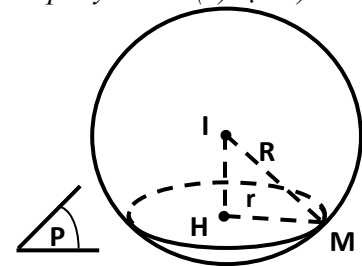
Trong không gian cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (P)

Gọi H là hình chiếu của tâm I trên (P)

- Nếu $IH > R$ thì (P) không có điểm chung với (S).
- Nếu $IH = R$ thì (P) tiếp xúc với (S) tại H

Trong trường hợp này ta nói (P) là tiếp diện của (S) tại H.

- Nếu $IH < R$ thì (P) cắt (S) theo một đường tròn (C) có tâm là H, bán kính $r = \sqrt{R^2 - IH^2}$



II – HÌNH NÓN VÀ KHỐI NÓN

1. Định nghĩa hình nón và khối nón

ĐN1: Cho ΔOIM vuông tại I quay quanh cạnh OI. Khi đó đường gấp khúc OMI tạo ra 1 hình nón

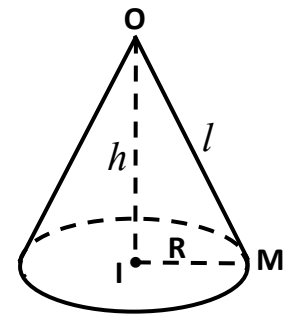
- Điểm O gọi là đỉnh của hình nón.
- Đoạn OI gọi là chiều cao của hình nón.
- Đoạn OM gọi là đường sinh của hình nón.
- Cạnh IM khi quay quanh OI tạo ra mặt đáy của hình nón.
- Cạnh OM khi quay quanh OI tạo ra mặt xung quanh của hình nón.

ĐN2: Khối nón là phần không gian được giới hạn bởi 1 hình nón kể cả hình nón đó

2. **Diện tích xung quanh của hình nón :** $S_{xq} = \pi Rl$

3. **Diện tích toàn phần của hình nón :** $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = \pi Rl + \pi R^2$

4. **Thể tích khối nón:** $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$



III – HÌNH TRỤ VÀ KHỐI TRỤ

1. Định nghĩa hình trụ và khối trụ

ĐN1: Cho hình chữ nhật OABI quay quanh cạnh OI. Khi đó đường gấp khúc OABI tạo ra 1 hình trụ.

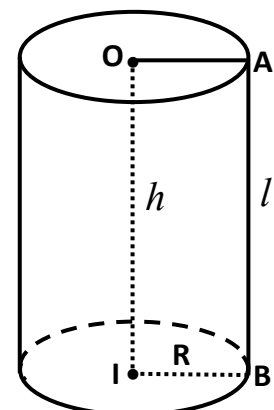
- Đoạn OI gọi là chiều cao của hình trụ.
- Đoạn AB gọi là đường sinh của hình trụ.
- Hai cạnh OA và IB khi quay quanh OI tạo ra hai mặt đáy của hình trụ.
- Cạnh AB khi quay quanh OI tạo ra mặt xung quanh của hình trụ.

ĐN2: Khối trụ là phần không gian được giới hạn bởi 1 hình trụ kể cả hình trụ đó

2. **Diện tích xung quanh của hình trụ :** $S_{xq} = 2\pi Rl$

3. **Diện tích toàn phần của hình trụ :** $S_{tp} = S_{xq} + S_{đáy} = 2\pi Rl + 2\pi R^2$

4. **Thể tích khối trụ:** $V = \pi R^2 h$



B - BÀI TẬP TỰ LUẬN

Dạng 1: Hình nón và khối nón

Bài 1. Tính thể tích của khối nón có chiều cao bằng a và góc ở đỉnh bằng 120^0 .

ĐS: $V = \pi a^3$

Bài 2. Tính thể tích khối nón có độ dài đường sinh bằng 2a, diện tích xung quanh bằng $2\pi a^2$.

ĐS: $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

Bài 3. Trong không gian cho tam giác vuông OAB tại O có OA = 4, OB = 3. Khi quay tam giác vuông OAB quanh cạnh góc vuông OA thì đường gấp khúc OAB tạo thành một hình nón tròn xoay.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b) Tính thể tích của khối nón

ĐS: $S_{xq} = 15\pi$; $S_{tp} = 24\pi$; $V = 12\pi$

Bài 4. Một hình nón có thiết diện qua trục là một tam giác đều cạnh 2a.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b) Tính thể tích của khối nón

ĐS: $S_{xq} = 2\pi a^2$; $S_{tp} = 23\pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$

Bài 5. Một hình nón có chiều cao bằng a và thiết diện qua trục là tam giác vuông.

a) Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình nón

b) Tính thể tích của khối nón

ĐS: $S_{xq} = \pi a^2 \sqrt{2}$; $S_{tp} = (1 + \sqrt{2}) \pi a^2$; $V = \frac{\pi a^3}{3}$

Dạng 2: Hình trụ và khối trụ

Bài 1. Tính thể tích, diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của khối trụ ngoại tiếp khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng 3a và cạnh bên bằng 4b.

ĐS: $V = 12a^2 b \pi$

Bài 2. Một hình trụ có bán kính đáy bằng R và thiết diện qua trục là một hình vuông. Tính diện tích xung quanh và diện tích toàn phần của hình trụ. Tính thể tích của khối trụ.

ĐS: $S_{xq} = 4\pi R^2$; $S_{tp} = 5\pi R^2$; $V = 2\pi R^3$

Bài 3. Một hình trụ có bán kính đáy $r = 5\text{cm}$ và khoảng cách giữa hai đáy bằng 7cm.

a) Tính diện tích xung quanh, diện tích toàn phần của hình trụ và tính thể tích của khối trụ

b) Cắt khối trụ bởi một mặt phẳng song song với trục và cách trục 3cm. Hãy tính diện tích của thiết diện được tạo nên

ĐS: a) $S_{xq} = 70\pi (\text{cm}^2)$; $S_{tp} = 20\pi (\text{cm}^2)$; $V = 175\pi (\text{cm}^3)$ b) $S = 56 (\text{cm}^2)$

Dạng 3: Mặt cầu và khối cầu

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có DA=5a và vuông góc với (ABC), ΔABC vuông tại B và AB = 3a, BC = 4a.

a) Xác định mặt cầu đi qua 4 điểm A, B, C, D

b) Tính bán kính của mặt cầu nói trên. Tính diện tích và thể tích của mặt cầu

ĐS: $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$; $S = 50\pi a^2$; $V = \frac{125\sqrt{2}\pi a^3}{3}$

Bài 2. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Xác định mặt cầu đi qua 5 điểm A, B, C, D, S

b) Tính bán kính của mặt cầu nói trên. Tính diện tích và thể tích của mặt cầu

ĐS: $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $S = 2a^2 \pi$; $V = \frac{a^3 \pi \sqrt{2}}{3}$

Bài 3. Cho hình chóp S.ABC có 4 đỉnh đều nằm trên một mặt cầu, SA = a, SB = b, SC = c và ba cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Tính diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu được tạo nên bởi mặt cầu đó.

ĐS: $S = 6\pi a^2$; $V = \pi a^3 \sqrt{6}$

Câu 15. Cho tam giác ABC vuông tại B có $AC = 2a; BC = a$; khi quay tam giác ABC quanh cạnh góc vuông AB thì đường gấp khúc ABC tạo thành một hình nón tròn xoay có diện tích xung quanh bằng:

- A. πa^2 B. $4\pi a^2$ C. $2\pi a^2$ D. $3\pi a^2$

Câu 16. Cho hình nón đỉnh S , đường cao SO ; $A; B$ là 2 điểm nằm trên đường tròn đáy hình nón sao cho khoảng cách từ O đến AB bằng a . Góc $\widehat{SAO} = 30^\circ; \widehat{SAB} = 60^\circ$. Khi đó độ dài đường sinh l của hình nón là:

- A. a B. $2a$ C. $a\sqrt{2}$ D. $2a\sqrt{2}$

Câu 17. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên $AA' = 2a$. Tam giác ABC vuông tại A có $BC = 2a\sqrt{3}$. Thể tích của hình trụ ngoại tiếp khối lăng trụ này là:

- A. $6\pi a^3$ B. $4\pi a^3$ C. $2\pi a^3$ D. $8\pi a^3$

Câu 18: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD), $SA = 2a$. Diện tích của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là:

- A. $6\pi a^2$ B. $12\pi a^2$ C. $36\pi a^2$ D. $3\pi a^2$

Câu 19: Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh đáy là a và cạnh bên là $2a$. Thể tích của khối cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCD là:

- A. $\frac{16a^3\pi\sqrt{14}}{49}$ B. $\frac{2a^3\pi\sqrt{14}}{7}$ C. $\frac{64a^3\pi\sqrt{14}}{147}$ D. $\frac{64a^3\pi\sqrt{14}}{49}$

Câu 20. Người ta bỏ ba quả bóng bàn cùng kích thước vào trong một chiếc hộp hình trụ có đáy bằng hình tròn lớn của quả bóng bàn và chiều cao bằng ba lần đường kính bóng bàn. Gọi S_1 là tổng diện tích của ba quả bóng bàn,

S_2 là diện tích xung quanh của hình trụ. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ bằng:

- A. 1 B. 2 C. 1,5 D. 1,2

CHỦ ĐỀ 4: MŨ VÀ LOGARIT

I – TỔNG HỢP LÝ THUYẾT

1. Các tính chất của mũ và lũy thừa

Cho $a > 0; b > 0; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}; (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$$

Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

2. Logarit

1. Định nghĩa: $a, b > 0; a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b$$

2. Các tính chất: $\log_a 1 = 0; \log_a a = 1; a^{\log_a b} = b; \log_a (a^\alpha) = \alpha$

3. Các quy tắc: $a > 0; b_1 > 0; b_2 > 0; a \neq 1$ ta có: $\log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$

$$\log_a \frac{b_1}{b_2} = \log_a b_1 - \log_a b_2$$

- Với $a > 0; b > 0; a \neq 1; \alpha \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}$ ta có:

$$\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b; \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b; \log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$$

- Với $1 \neq a > 0; b > 0; 0 < c \neq 1$ ta có:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \log_a b = \frac{1}{\log_b a} (b \neq 1)$$

$$\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b (\alpha \neq 0)$$

4. Logarit thập phân, logarit tự nhiên: $\log_{10} x = \lg x$ hoặc $\log_{10} x = \log x; \log_e x = \ln x$

II – BÀI TẬP TỰ LUẬN

LŨY THỪA

Bài 1: Tính:

a) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$

b) $(0,04)^{-1,5} - (0,125)^{-\frac{2}{3}}$

c) $8^{\frac{2}{7}} \cdot 8^{\frac{5}{7}} - 3^{\frac{6}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{2}}$

d) $\left(5^{-\frac{2}{3}}\right)^{-3} + \left(0,2^{\frac{5}{4}}\right)^{-4}$

Đáp số: a) 24 b) 121 c) -1 d) 150

Bài 2: Cho $a, b > 0$. Đơn giản các biểu thức sau:

a) $A = \frac{a^{\frac{2}{3}} \left(a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}} \right)}$

b) $B = \frac{a^{\frac{2}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

Đáp số: a) $A = a$ b) $B = \sqrt[3]{ab}$

Bài 3: Hãy so sánh các cặp số sau

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}}$ và $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt[3]{5}$ và $\sqrt[3]{7}$

Đáp số: a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{3}} < \left(\frac{1}{9}\right)^{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{7}$

PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT

Bài 1: Giải phương trình mũ

- | | |
|---|---|
| 1. $3^{x+3} - 3^x = 121$ | 1. ĐS: $x = -\log_3 2$ |
| 2. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-2x+4} = 9^{x^2+2x-3}$ | 2. ĐS: $x = 1, x = -3$ |
| 3. $81^{\frac{x+10}{x-10}} = \frac{1}{27} \cdot 27^{\frac{x+1}{x-1}}$ | 3. ĐS: $x = 0; x = 20$ |
| 4. $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$ | 4. ĐS: $x = \pm 1$ |
| 5. $9^{x^2+1} - 3^{x^2+1} - 6 = 0$ | 5. ĐS: $x = 0$ |
| 6. $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$ | 6. Đặt $t = 2^{x+\sqrt{x^2-2}}$. ĐS: $x = \frac{3}{2}$ |
| 7. $5^x \cdot 8^{\frac{x-1}{x}} = 500$ | 7. ĐS: $x = 3; x = -\log_3 2$ |
| 8. $8^x + 18^x - 2 \cdot 27^x$ | 8. ĐS: $x = 0$ |
| 9. $(2 - \sqrt{3})^x + (2 + \sqrt{3})^x = 14$ | 9. ĐS: $x = \pm 2$ |

Bài 2: Giải các phương trình sau

- | | |
|--|-----------------------------------|
| 1. $\log_{23}(4x+5)^2 + \log_3 x = \log_3 27$ | 1. ĐS: $x = 5; x = -\frac{23}{4}$ |
| 2. $x + \log(1+2^x) = x \log 5 + \log 6$ | 2. ĐS: $x = 1$ |
| 3. $\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_8 x = \frac{3}{2}$ | 3. ĐS: $x = \sqrt{2}$ |
| 4. $\frac{1}{4-\lg x} + \frac{2}{x+\lg x} = 1$ | 4. ĐS: $x = 10; x = 100$ |
| 5. $\log_2 x + \sqrt{10 \log_2 x + 6} = 9$ | 5. ĐS: $x = 8$ |
| 6. $x + \lg(4-5^x) = x \lg 2 + \lg 3$ | 6. ĐS: $x = 0; x = \log_3 3$ |
| 7. $1 + \log_2(x-1) = \log_{x-1} 4$ | 7. ĐS: $x = 3; x = \frac{5}{4}$ |
| 8. $\log_2 x + \log_x 2 = \frac{3}{2}$ | 9. ĐS: $x = 4; x = \sqrt{2}$ |

Bài 3: Giải các bất phương trình sau:

- | | |
|--|---|
| 1. $6^{x^2-6x+8} > 1$ | 1. ĐS: $x > 4$ hoặc $x < 2$ |
| 2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+4} \geq 2^{2x+1}$ | 2. ĐS: $T = (-\infty; -4] \cup (-3; -1]$ |
| 3. $5^{x+1} > 0,008 \cdot 25^{4x^2+8x+\frac{xy}{5}}$ | 3. ĐS: $T = \left(-\frac{13}{8}; -\frac{1}{4}\right)$ |
| 4. $\log_2(2x^2 + 5x - 3) > 2$ | 4. ĐS: $T = \left(-\infty; -\frac{7}{2}\right) \cup (1; +\infty)$ |
| 5. $\log_{\frac{1}{3}}(2x + x^2) > -1$ | 5. ĐS: $T = (-3; -2) \cup (0; 1)$ |
| 6. $\log_3(x+1) + \log_3(11-x) \leq 3$ | 6. ĐS: $T = (-1; 2) \cup (8; 11)$ |

III – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

001. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2017^x$

- A. $y' = x2017^{x-1}$ **B.** $y' = 2017^x \ln 2017$ C. $y' = \frac{2017^x}{\ln 2017}$ D. $y' = 2017^x$

002. Tập xác định của hàm số $y = \log\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$ là :

- A. $D = (-1; +\infty)$ **B.** $D = (-1; 3)$ C. $D = (-\infty; 3)$ D. $D = (2; +\infty)$

003. Nếu m là số nguyên dương, biểu thức nào theo sau đây không bằng với $(2^4)^m$?

- A. 4^{2m} **B.** $2^m \cdot (2^{3m})$ C. $4^m \cdot (2^m)$ D. 2^{4m}

004. Kết quả $a^{\frac{5}{2}}$ ($a > 0$) là biểu thức rút gọn của phép tính nào sau đây?

- A. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a}$ **B.** $\frac{\sqrt[3]{a^7} \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[3]{a}}$ C. $a^2 \cdot \sqrt[5]{a}$ D. $\frac{\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a}}$

005. Cho $0 < a < 1$. Mệnh đề nào sau đây là SAI?

- A. $a^{-\sqrt{5}} > \frac{1}{a^{2\sqrt{2}}}$ B. $a^{\frac{1}{5}} > \sqrt{a}$ C. $\frac{1}{a^{2016}} < \frac{1}{a^{2017}}$ D. $\frac{\sqrt[5]{a^3}}{a} > 1$

006. Tập xác định của hàm số $y = (2-3x)^{\sqrt{5}}$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$ **B.** $D = \left(\frac{2}{3}; +\infty \right)$ C. $D = \left(-\infty; \frac{2}{3} \right)$ D. $D = \left(-\infty; \frac{2}{3} \right] \cup \left[2, +\infty \right)$

007. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x \cdot \sqrt[4]{x}}$ là: **A.** $y' = -\frac{5}{4\sqrt[4]{x^9}}$ B. $y' = \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt[4]{x}}$ C. $y' = \frac{5}{4} \sqrt[4]{x}$ D. $y' = -\frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}}$

008. Thực hiện phép tính biểu thức $\left[(a^3 \cdot a^8) : (a^5 : a^{-4}) \right]^2$ ($a \neq 0$) được kết quả là:

- A. a^2 B. a^8 C. a^6 **D.** a^4

009. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $4^{-\sqrt{3}} > 4^{-\sqrt{2}}$ B. $3^{\sqrt{3}} < 3^{1.7}$ C. $\left(\frac{1}{3}\right)^{1.4} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ **D.** $\left(\frac{2}{3}\right)^\pi < \left(\frac{2}{3}\right)^e$

010. Cho $\lg 2 = a$. Tính $\lg 25$ theo a?

- A. $2 + a$ B. $2(2 + 3a)$ C. $2(1 - a)$ D. $3(5 - 2a)$

011. Hàm số $y = \sqrt[3]{2x^2 - x + 1}$ có đạo hàm là:

- A. $\frac{4x-1}{3 \cdot \sqrt[3]{(2x^2-x+1)^2}}$ B. $(12x-3) \sqrt[3]{(2x^2-x+1)^2}$ C. $\frac{4x-1}{\sqrt[3]{(2x^2-x+1)^2}}$ D. $\frac{\sqrt[3]{(2x^2-x+1)^2}}{3}$

012. Cho hàm số $y = x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$. Khẳng định nào sau đây là đúng ?

- A. $x^2 y'' + xy' - 2y = 0$ B. $x^2 y'' - xy' - 2y = 0$
C. $x^2 y' - xy'' + 2y = 0$ **D.** $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$

013. Biểu thức $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[6]{x^5}$ ($x > 0$) viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là:

- A. $x^{\frac{2}{3}}$ B. $x^{\frac{7}{3}}$ C. $x^{\frac{5}{3}}$ D. $x^{\frac{5}{2}}$

014. Cho $\pi^\alpha > \pi^\beta$. Kết luận nào sau đây là đúng?

- A. $\alpha < \beta$ **B.** $\alpha > \beta$ C. $\alpha + \beta = 0$ D. $\alpha, \beta = 1$

015. Cho $f(x) = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt{x}$. Khi đó $f(0,09)$ bằng: **A.** 0,2 B. 0,4 C. 0,1 **D.** 0,3

016. Rút gọn biểu thức: $\sqrt[6]{x^{12}(x+1)^6}$, ta được:

- A.** $x^2|x+1|$ **B.** $-x^6(x+1)^2$ **C.** $x^6(x+1)$ **D.** $-|x^2(x+1)|$
- 017.** Hàm số $y = \sqrt[3]{1-x^2}$ có tập xác định là:
A. $(-1; 1)$ **B.** $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ **C.** \mathbb{R} **D.** $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$
- 018.** Cho $f(x) = \ln|\tan x|$. Đạo hàm $f'(\frac{\pi}{4})$ bằng: **A.** 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4
- 019.** Cho $\log_2 5 = a$. Khi đó $\log_4 500$ tính theo a là:
A. $3a + 2$ **B.** $\frac{1}{2}(3a + 2)$ **C.** $2(5a + 4)$ **D.** $6a - 2$
- 020.** Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao nhiêu quý thì người đó có được ít nhất 20 triệu ?
A. 15 **B.** 18 **C.** 17 **D.** 16
- 021.** Rút gọn : $\frac{(\sqrt[4]{a^3 b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12} b^6}}}$ ta được : **A.** $a^2 b$ **B.** ab^2 **C.** $a^2 b^2$ **D.** ab
- 022.** Rút gọn : $\left(a^{\frac{2}{3}} + 1\right) \left(a^{\frac{4}{9}} + a^{\frac{2}{9}} + 1\right) \left(a^{\frac{2}{9}} - 1\right)$ ta được : **A.** $a^{\frac{1}{3}} + 1$ **B.** $a^{\frac{4}{3}} + 1$ **C.** $a^{\frac{4}{3}} - 1$ **D.** $a^{\frac{1}{3}} - 1$
- 023.** Tập nghiệm của phương trình $\log_{\sqrt{3}}|x+1| = 2$
A. $\{-3; 2\}$ **B.** $\{-10; 2\}$ **C.** $\{-4; 2\}$ **D.** $\{3\}$
- 024.** Số nghiệm của phương trình $\log_2 x \cdot \log_3(2x-1) = 2 \cdot \log_2 x$ là
A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2
- 025.** Phương trình $\frac{1}{5 - \log_2 x} + \frac{2}{1 + \log_2 x} = 1$ có tổng các nghiệm là :
A. $\frac{33}{64}$ **B.** 12 **C.** 5 **D.** 66
- 026.** Phương trình $\log_2(\log_4 x) = 1$ có nghiệm là :
A. 2 **B.** 4 **C.** 16 **D.** 8
- 027.** Cho phương trình: $\log_2(x^3 + 1) - \log_2(x^2 - x + 1) - 2 \log_2 x = 0$. Phát biểu nào sau đây đúng:
A. $x \neq 0$ **B.** $x > 0$ **C.** $x > -1$ **D.** $x \in \mathbb{R}$
- 028.** Phương trình $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$ tương đương với phương trình nào dưới đây
A. $9 - 2^x = 3 - x$ **B.** $x^2 - 3x = 0$ **C.** $x^2 + 3x = 0$ **D.** $9 - 2^x + 3 = 2^{-x}$
- 029.** Số nghiệm của phương trình $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$ là:
A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1
- 030.** Tập nghiệm phương trình $\log_3^2(4-x) - 2 \log_{\frac{1}{3}}(4-x) = 15$ là:
A. $\{5; -3\}$ **B.** $\{3^5; 3^{-3}\}$ **C.** $\left\{\frac{971}{243}; -23\right\}$ **D.** $\left\{-239; \frac{107}{27}\right\}$
- 031.** Phương trình $\log(x^2 - 7x + 12) = \log(2x - 8)$ có bao nhiêu nghiệm:
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 4
- 032.** Phương trình $\log_2(|x+1|-2) = 2$ không tương đương với phương trình nào sau đây:
A. $|x+1|-2 = 4$ **B.** $|x+1| = 6$ **C.** $x+1 = 6$ **D.** $\sqrt{x+1} = 2$
- 033.** Phương trình $4 \log_{25} x + \log_x 5 = 3$ có nghiệm là:
A. $x = 5; x = \sqrt{5}$ **B.** $x = 1; x = \frac{1}{2}$ **C.** $x = \frac{1}{5}; x = 5$ **D.** $x = \frac{1}{5}; x = \sqrt{5}$
- 034.** Tìm m để phương trình: $\log_{\sqrt{3}}^2 x - m \log_{\sqrt{3}} x + 1 = 0$ có nghiệm duy nhất nhỏ hơn 1
A. $m = -2$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = \pm 2$ **D.** Không tồn tại m

CHỦ ĐỀ 5: SỐ PHỨC

I. TỔNG HỢP LÝ THUYẾT.

Dạng toán 1. Tìm các thuộc tính của số phức thỏa mãn nhiều điều kiện K cho trước

→ **Phương pháp giải:**

- **Bước 1.** Gọi số phức cần tìm là $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
- **Bước 2.** Biến đổi điều kiện K (thường liên quan đến môđun, biểu thức có chứa $z, \bar{z}, |z|, \dots$) để đưa về phương trình hoặc hệ phương trình nhờ 2 số phức bằng nhau, rồi suy ra x và $y \Rightarrow z = \dots$
- **Lưu ý.** Trong trường phức \mathbb{C} , cho số phức $z = x + yi$ có phần thực là x và phần ảo là y với $x, y \in \mathbb{R}$ và $i^2 = -1$. Khi đó, ta cần nhớ:
 - Môđun của số phức $z = x + yi$ là $|z| = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (căn của thực bình cộng ảo bình).
 - Số phức liên hợp của $z = x + yi$ là $\bar{z} = x - yi$ (ngược dấu ảo).
 - Hai số phức $z_1 = x_1 + y_1.i$ và $z_2 = x_2 + y_2.i$ được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi $\begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$ (hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi thực = thực và ảo = ảo).
 - Trong bài toán tìm thuộc tính của số phức z thỏa mãn điều kiện K cho trước, nếu K là thuần z (tất cả đều z) hoặc thuần \bar{z} thì đó là bài toán giải phương trình bậc nhất (phép cộng – trừ – nhân – chia số phức) với ẩn z (hoặc \bar{z}). Còn nếu chứa hai loại trở lên ($z, \bar{z}, |z|$) thì ta sẽ gọi $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi$. Từ đó sử dụng các phép toán trên số phức để đưa về hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi thực = thực, ảo = ảo để giải hệ phương trình tìm $x, y \Rightarrow z$.

Dạng toán 2. Biểu diễn hình học của số phức và bài toán liên quan

Loại 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , hãy tìm tập hợp điểm M biểu diễn các số phức $z = x + yi$ thỏa mãn điều kiện K cho trước ?

- Bước 1. Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức: $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$.
- Bước 2. Biến đổi điều kiện K để tìm mối liên hệ giữa x, y và kết luận.

Mối liên hệ giữa x và y	Kết luận tập hợp điểm $M(x; y)$
○ $Ax + By + C = 0$.	Là đường thẳng $d: Ax + By + C = 0$.
○ $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \end{cases}$	Là đường tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
○ $\begin{cases} (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c \leq 0 \end{cases}$	Là hình tròn (C) có tâm $I(a; b)$ và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.
○ $R_1^2 \leq (x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R_2^2$.	Là những điểm thuộc miền có hình vành khăn tạo bởi hai đường tròn đồng tâm $I(a; b)$ và bán kính lần lượt R_1 và R_2 .
○ $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.	Là một parabol (P) có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$.
○ $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 + MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c < 2a \end{cases}$	Là một elíp có trục lớn $2a$, trục bé $2b$ và tiêu cự là $2c = 2\sqrt{a^2 - b^2}, (a > b > 0)$.
○ $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$ với $\begin{cases} MF_1 - MF_2 = 2a \\ F_1F_2 = 2c > 2a \end{cases}$	Là một hyperbol có trục thực là $2a$, trục ảo là $2b$ và tiêu cự $2c = 2\sqrt{a^2 + b^2}$ với $a, b > 0$.
○ $MA = MB$.	Là đường trung trực của đoạn thẳng AB .

Loại 2: Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất thỏa mãn tính chất K cho trước ?

- **Bước 1.** Tìm tập hợp điểm biểu diễn các số phức z để được mối liên hệ giữa x và y .
- **Bước 2.** Dựa vào mối liên hệ giữa x và y ở bước 1, để tìm $|z|_{\min}, |z|_{\max}$?

☞ **Lưu ý:** Thông thường với loại này, người ra đề hay cho tập hợp biểu diễn số phức z là một đường thẳng hoặc đường tròn. Khi đó, ta có hai hướng xử lý: một là sử dụng phương pháp hình học, hai là sử dụng phương pháp đại số (bất đẳng thức).

Dạng toán 3. Phõng trình bậc hai và bậc cao trong trõõng số phõc

Phõng trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai $az^2 + bz + c = 0, (*)$ với $a \neq 0$ có biệt số: $\Delta = b^2 - 4ac$. Khi đó:

- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình $(*)$ có nghiệm kép: $z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta \neq 0$ và gọi δ là căn bậc hai Δ thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt là:

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \text{ hoặc } z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

☞ **Lưu ý**

- Hệ thức Viét vẫn đúng trong trường phức \mathbb{C} : $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ và $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.
- Căn bậc hai của số phức $z = x + yi$ là một số phức ω và tìm như sau:
 - + Bước 1. Đặt $\omega = \sqrt{z} = \sqrt{x + yi} = a + bi$ với $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.
 - + Bước 2. Biến đổi: $\omega^2 = x + yi = (a + bi)^2 \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = x + yi^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = x \\ 2ab = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$
 - + Bước 3. Kết luận các căn bậc hai của số phức z là $\omega = \sqrt{z} = a + bi$.

Ta có thể làm tương tự đối với trường hợp căn bậc ba, căn bậc bốn. Ngoài cách tìm căn bậc hai của số phức như trên, ta có thể tách ghép đưa về số chính phương dựa vào hằng đẳng thức.

Phõng trình qui về phõng trình bậc hai

Trong giải phương trình bậc cao, nếu đề cho phương trình có một nghiệm thuần ảo, ta thế $z = bi$ vào phương trình và giải tìm $b \Rightarrow z = bi$. Do có nghiệm $z = bi$ nên chia Hoochner để đưa về phương trình bậc thấp hơn mà đã biết cách giải để tìm nghiệm còn lại. Còn nếu đề bài cho biết có 1 nghiệm thực. Khi đó cần đến khả năng nhân nghiệm của phương trình bậc cao (nếu có i thì ta sẽ nhân nghiệm sao cho triệt tiêu đi i).

II. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 1

Câu 1. Trong những số sau số nào là số ảo: $\sqrt{-3}, \sqrt[3]{-3}, \sqrt[4]{-3}, \sqrt[5]{-3}, \sqrt[6]{-3}$

- A. $\sqrt{-3}$ B. $\sqrt[3]{-3}$ C. $\sqrt[3]{-3}$ D. $\sqrt{-3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[6]{-3}$

Câu 2. Số nào trong các số sau là số thực?

- A. $(\sqrt{3} + 2i) - (\sqrt{2} - 2i)$ B. $(2 + i\sqrt{5}) + (2 - i\sqrt{5})$ C. $(1 + i\sqrt{3})^2$ D. $\frac{\sqrt{2} + i}{\sqrt{2} - i}$

Câu 3. Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

- A. $(\sqrt{2} + 3i) + (\sqrt{2} - 3i)$ B. $(\sqrt{2} + 3i) + (\sqrt{2} - 3i)$ C. $(2 + 2i)^2$ D. $\frac{2 + 3i}{2 - 3i}$

Câu 4. Phần ảo của số phức z^2 biết $\bar{z} = 4 - 3i + \frac{1+i}{2+i}$ là:

- A. $\frac{644}{25}$ B. $\frac{644}{27}$ C. $\frac{644}{29}$ D. $\frac{644}{31}$

Câu 5. Số $z + \bar{z}$ là:

- A. Số thực B. Số ảo C. 0 D. 2

Câu 6. Số $z - \bar{z}$ là:

- A. Số thực B. Số ảo C. 0 D. 2i

Câu 7. Môđun của $1 - 2i$ bằng

- A. 3 B. $\sqrt{5}$ C. 2 D. 1

Câu 8. Môđun của $-2iz$ bằng

- A. $-2|z|$ B. $\sqrt{2}z$ C. $2|z|$ D. 2

Câu 9. Cho số phức z thỏa điều kiện $2(z-1) = 3\bar{z} + (i-1)(i+2)$ (1). Môđun của z là:

- A. $\frac{\sqrt{26}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{26}}{10}$ C. $\frac{\sqrt{26}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{26}}{12}$

Câu 10. Cho số phức thỏa $(2+i)z + \frac{2(1+2i)}{1+i} = 7+8i$. Môđun của số phức $w = z + 1 + i$ bằng:

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

Câu 11. Phần ảo của số phức z , biết $\bar{z} = (\sqrt{2} + i)^2(1 - \sqrt{2}i)$ là:

- A. $-\sqrt{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. -2

Câu 12. Môđun của số phức $z = 5 + 2i - (1+i)^3$ là :

- A. 7 B. 3 C. 5 D. 2

Câu 13. Số phức z thỏa mãn $z + 2(z + \bar{z}) = 2 - 6i$ có phần thực là

- A. -6 B. $\frac{2}{5}$ C. -1 D. $\frac{3}{4}$

Câu 14. Cho số phức thỏa mãn $z + (1 - 2i)\bar{z} = 2 - 4i$. Tìm môđun của $w = z^2 - z$?

- A. $\sqrt{10}$ B. 10 C. 5 D. $\sqrt{5}$

Câu 15. Cho số phức $z = 5 - 2i$. Số phức z^{-1} có phần ảo là :

- A. 29 B. 21 C. $\frac{5}{29}$ D. $\frac{2}{29}$

Câu 16. Cho số phức $z = a + bi$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

- A. $i z + \bar{z} = 2bi$ B. $z - \bar{z} = 2a$ C. $z\bar{z} = a^2 - b^2$ D. $|z^2| = |z|^2$

Câu 17. Tìm $z = (2 + 3i)(2 - 3i)$

- A. $z = 4$ B. $z = -9i$ C. $z = 4 - 9i$ D. $z = 13$

Câu 18. Số phức liên hợp của số phức $5 + 2i - 3(-7 + 6i) + (2 - i)$ là?

- A. $18 + 17i$ B. $18 - 17i$ C. $-14 + 19i$ D. $28 - 17i$

Câu 19. Phần ảo của số phức $\frac{3+2i}{2-i}$ là?

- A. $\frac{7}{5}$. B. $\frac{4}{5}$ C. $\frac{7}{5}i$ D. $\frac{7}{3}$

Câu 20. Biểu diễn về dạng $z = a + bi$ của số phức $z = \frac{i^{2016}}{(1+2i)^2}$ là số phức nào?

- A. $\frac{3}{25} + \frac{4}{25}i$ B. $\frac{-3}{25} + \frac{4}{25}i$ C. $\frac{3}{25} - \frac{4}{25}i$ D. $\frac{-3}{25} - \frac{4}{25}i$

Câu 21. Điểm M biểu diễn số phức $z = \frac{3+4i}{i^{2019}}$ có tọa độ là :

- A. M(-4;3) B. M(4;-3) C. M(4;3) D. M(-4;-3)

Câu 22. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau :

- A. Số phức $z = a + bi$ được biểu diễn bằng điểm $M(a;b)$ trong mặt phẳng Oxy.
 B. Số phức $z = a + bi$ có số phức liên hợp là $-a - bi$
 C. Số phức $z = a + bi = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$
 D. Số phức $z = a + bi$ có số phức đối $-a - bi$

Câu 23. Cho số phức $z = a + bi, ab \neq 0$. Khi đó số phức z^2 là số thuần ảo trong điều kiện nào sau đây?

- A. $a = b$ B. $a = -b$ C. $a = \pm b$ D. $a = 2b$

Câu 24. Cho số phức thỏa mãn $z + (1 - 2i)\bar{z} = 2 - 4i$. Tìm môđun của $w = z^2 - z$?

- A. $\sqrt{10}$ B. 10 C. 5 D. $\sqrt{5}$

Câu 25. Cho $z = m + 3i, z' = 2 - (m + 1)i$. Giá trị nào của m sau đây để zz' là số thực ?

- A. $\begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m = -3 \\ m = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m = 2 \\ m = -3 \end{cases}$

Câu 26. Cho số phức z , khi đó mệnh đề sai là

- A. $|z| = |\bar{z}|$. B. $z + \bar{z}$ là một số thực.
 C. $z \cdot \bar{z}$ là một số thực. D. môđun của z là một số thực dương.

Câu 27. Cho $z = m + 3i, z' = 2 - (m + 1)i$. Giá trị nào của m sau đây để $z \cdot z'$ là số thực

- A. $m = 1$ hoặc $m = -2$ B. $m = -2$ hoặc $m = -3$
 C. $m = -1$ hoặc $m = 2$ D. $m = 2$ hoặc $m = -3$

Câu 28. Trong các số phức sau, số phức nào có môđun nhỏ nhất ?

- A. $z = -3i$ B. $z = 1 - 3i$ C. $z = -3 - 2i$ D. $z = 2 + 2i$

Câu 29. Cho các số phức: $z_1 = 3i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = -2 - 3i$. Tổng phần thực và phần ảo của số phức có môđun lớn nhất trong 3 số phức đã cho là

- A. 3 B. -5 C. -1 D. 5

Câu 30. Cho các số phức: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i, z_2 = -2 + \sqrt{2}i, z_3 = -2 - \sqrt{3}i$. Tích phần thực và phần ảo của số phức có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

- A. $\sqrt{3}$ B. $-2\sqrt{2}$ C. $-2\sqrt{3}$ D. $2\sqrt{2}$

Câu 31. Cho các số phức: $z_1 = 3i, z_2 = -1 - 3i, z_3 = m - 2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_3 có môđun nhỏ nhất trong 3 số phức đã cho là

- A. $(-\infty; -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}; +\infty)$ B. $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ C. $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$ D. $m = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\}$

Câu 32. Cho các số phức: $z_1 = 2i, z_2 = m - 3 - 2i, z_3 = 1 - 2i$. Tập giá trị tham số m để số phức z_2 có môđun lớn nhất trong ba số phức đã cho là

- A. (2; 4) B. $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$ C. [2; 4] D. $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 2

Câu 1. Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phần thực là 2 là:

- A. $x = -2$ B. $x = 2$ C. $x = 1$ D. $x = -1$

Câu 2. Trên mặt phẳng phức, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phần ảo bằng 3 là:

- A. $x = 3$ B. $y = -3$ C. $y = 3$ D. $x = 2$

Câu 3. Trong mặt phẳng phức tìm tập hợp điểm $M(z)$ thỏa mãn $|z + 1 - i| \leq 3$

- A. Đường thẳng $y = 3$ B. Đường thẳng $x = -3$
 C. Đường thẳng $y + x = 3$ D. Hình tròn tâm $I(-1;1)$, $R = 3$

Câu 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $|z - (8 - 9i)| = 3$ là đường tròn có tọa độ tâm I và bán kính R lần lượt là:

- A. $I(8;-9)$, $R = 3$ B. $I(8;9)$, $R = 3$ C. $I(8;9)$, $R = 3$ D. $I(-8;-9)$, $R = 3$

Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp điểm biểu diễn các số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ là một đường thẳng có phương trình:

- A. $y = \frac{1}{4}x^2$ B. $y = -\frac{1}{4}x^2$ C. $y = \frac{1}{2}x^2$ D. $y = -\frac{1}{2}x^2$

Câu 6. Tập hợp các điểm biểu diễn của số phức z thỏa mãn $\left| \frac{z+2-3i}{z-4+i} \right| = 1$ là một đường thẳng có phương trình:

- A. $3x - y - 1 = 0$ B. $3x + y + 1 = 0$ C. $x - y - 1 = 0$ D. $x - 3y - 1 = 0$

Câu 7. Tập nghiệm biểu diễn số phức z thỏa $\left| \frac{z-i}{z+i} \right| = 1$ là:

- A. Đường tròn B. Điểm C. Elip D. Đường thẳng

Câu 8. Số phức $z = 2 + 3i$ có điểm biểu diễn là:

- A. $(2; 3)$ B. $(-2; -3)$ C. $(2; -3)$ D. $(-2; 3)$

Câu 9. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là:

- A. $(2; -3)$ B. $\left(\frac{2}{13}; \frac{3}{13}\right)$ C. $(3; -2)$ D. $(4; -1)$

Câu 10. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện số phức $|zi - (2+i)| = 2$ là :

- A. $3x + 4y - 2 = 0$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ D. $x + 2y - 1 = 0$

Câu 11. Cho số phức $z \neq 0$. Biết rằng số phức nghịch đảo của z bằng số phức liên hợp của nó. Trong các kết luận nào đúng:

- A. $z \in \mathbb{R}$ B. z là một số thuần ảo
 C. $|z| = 1$ D. $|z| = 2$

Câu 12. Trong mặt phẳng phức, các điểm A, B, C lần lượt biểu diễn của các số phức $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = 1 + 5i$, $z_3 = 4 + i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành là:

- A. $2 + 3i$ B. $2 - i$ C. $2 + 3i$ D. $3 + 5i$

Câu 13. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Khi đó độ dài của vectơ \overrightarrow{AB} bằng:

- A. $|z_1| - |z_2|$ B. $|z_1| + |z_2|$ C. $|z_1 - z_2|$ D. $|z_1 + z_2|$

Câu 14. Tập hợp điểm biểu diễn số phức z , biết $|3zi + 4| = \sqrt{2}$ là

- A. Điểm B. Đường thẳng C. Đường tròn D. Elip

Câu 15. Biết $|z - i| = |(1+i)z|$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trình?

- A. $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$ B. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

Câu 16. Số phức $z = 2 - 3i$ có điểm biểu diễn là:

- A. $(2; 3)$ B. $(-2; -3)$ C. $(2; -3)$ D. $(-2; 3)$

Câu 17. Xét các điểm A, B, C trong mặt phẳng phức theo thứ tự là các điểm biểu diễn các số phức $\frac{4i}{i-1}; (1-i)(1+2i); \frac{2+6i}{3-i}$. Tam giác ABC

- A. Vuông B. Vuông cân C. Đều D. Cân

Câu 18. Điểm biểu diễn của số phức $z = \frac{1}{2-3i}$ là:

- A. (2; -3) B. $(\frac{2}{13}; \frac{3}{13})$ C. (3; -2) D. (4; -1)

Câu 19. Giả sử A, B theo thứ tự là điểm biểu diễn của các số phức z_1, z_2 . Khi đó độ dài của véctơ \overline{AB} bằng:

- A. $|z_1| - |z_2|$ B. $|z_1| + |z_2|$ C. $|z_2 - z_1|$ D. $|z_2 + z_1|$

Câu 20. Trong mặt phẳng phức cho ΔABC . Biết rằng A, B lần lượt biểu diễn các số phức $z_1 = 2 - 2i$; $z_2 = -2 + 4i$. Khi đó, điểm C biểu diễn số phức nào sau đây để ΔABC vuông tại C?

- A. $z = 2 - 4i$ B. $z = -2 + 2i$ C. $z = 2 + 4i$ D. $z = 2 - 2i$

Câu 21. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện $|zi - (2+i)| = 2$ là

- A. $(z+1)i = 4$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$
 C. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$ D. $x+2y-1=0$

Câu 22. Biết $|z-i| = |(1+i)z|$, tập hợp điểm biểu diễn số phức z có phương trình?

- A. $x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0$ B. $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0$
 C. $x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0$ D. $x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0$

Câu 23. Trong mặt phẳng phức, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn của các số phức $z_1 = -1+3i, z_2 = 1+5i, z_3 = 4+i$. Số phức với điểm biểu diễn D sao cho tứ giác ABCD là một hình bình hành là:

- A. $1 - 2i$ B. $2 - i$ C. $1 + 2i$ D. $-2 + i$

Câu 24. Trên mặt phẳng tọa độ, cho số phức $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) các điểm biểu diễn z và \bar{z} đối xứng nhau qua

- A. trục Ox. B. trục Oy. C. gốc tọa độ O. D. đường thẳng $y = x$.

Câu 25. Cho số phức $z = 6 + 7i$. Số phức liên hợp của z có điểm biểu diễn là

- A. (6; -7). B. (6; 7). C. (-6; 7). D. (-6; -7).

Câu 26. Cho số phức z thỏa mãn: $|z-1+i| = |\bar{z}+1-2i|$. Số phức z có mô đun nhỏ nhất là:

- A. $\frac{-3}{5} - \frac{3}{10}i$ B. $\frac{-3}{5} + \frac{3}{10}i$ C. $\frac{3}{5} + \frac{3}{10}i$ D. $\frac{3}{5} - \frac{3}{10}i$

Câu 27. Tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z + \frac{1}{z}| = 2$ là:

- A. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$ B. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y + 1 = 0 \end{cases}$
 C. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y - 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2y - 2 = 0 \end{cases}$

PHIẾU BÀI TẬP SỐ 3

Câu 1. Trong tập hợp số phức, căn bậc hai của -4 là:

- A. -2i B. 2i C. $\pm 2i$ D. -2

Câu 2. Căn bậc hai của số thực a âm là:

A. $\sqrt{|a|}$ B. $-i\sqrt{|a|}$ C. $\pm i\sqrt{|a|}$ D. $i\sqrt{|a|}$

Câu 3. Tìm số phức z có phần ảo khác 0, thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z \cdot \bar{z} = 25$?

A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $3 + 4i$ D. $3 - 4i$

Câu 4. Gọi z_1 và z_2 lần lượt là nghiệm của phương trình: $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $\mathbb{F} = |z_1| + |z_2|$

A. $2\sqrt{5}$ B. 10 C. 3 D. 6

Câu 5. Giải phương trình trên tập số phức: $2x^2 - 6x + 29 = 0$

A. $x = \frac{3 + 7i}{2}$ B. $x_1 = \frac{3 + 7i}{2}; x_2 = \frac{3 - 7i}{2}$ C. $x = \frac{3 - 7i}{2}$ D. $x = 3 \pm 7i$

Câu 6. Tập hợp các nghiệm của phương trình $z = \frac{z}{z + i}$ là:

A. $\{0; 1 - i\}$ B. $\{0\}$ C. $1 - i$ D. $\{0, 1\}$

Câu 7. Nghiệm của phương trình sau trên C: $z^2 - 4\bar{z} - 5 = 0$

A. $z_1 = -1, z_2 = 5, z_3 = -2 - \sqrt{7}i, z_4 = -2 + \sqrt{7}i$ B. $z_1 = 1, z_1 = -5$
 C. $z_1 = 1, z_1 = -5, z_3 = 2 + \sqrt{7}i, z_4 = 2 - \sqrt{7}i$ D. $z_1 = 2 + \sqrt{7}i, z_2 = 2 - \sqrt{7}i$

Câu 8. Giải phương trình sau trên C: $z^4 - 9z^2 + 18z - 9 = 0$,

A. $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}, z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}$ B. $z_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{3}i}{2}, z_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{4}$
 C. $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{2}, z_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{4}$ D. $z_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}i}{4}, z_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{21}i}{2}$

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$ trên trường số phức là:

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

Câu 10. Nghiệm của phương trình sau trên C: $z^2 + 2|z| - 35 = 0$

A. $z = \pm 5$ B. $z = \pm 4$ C. $z = \pm 3$ D. $z = \pm 2$

Câu 11. Nghiệm của phương trình sau trên C: $(z + 3)^4 + (z + 5)^4 = 16$

A. $\begin{cases} z_1 = -3 \\ z_2 = -5 \\ z_{3,4} = -4 \pm 7i \end{cases}$ B. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3 \\ z_{3,4} = -4 \pm 7i \end{cases}$ C. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 5 \\ z_{3,4} = -4 \pm 7i \end{cases}$ D. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3i \\ z_{3,4} = -4 \pm 7i \end{cases}$

Câu 12. Nghiệm của phương trình sau trên C: $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 16$

A. $\begin{cases} z_1 = -3i \\ z_2 = -\frac{1}{3}i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 - 3i}{5} \end{cases}$ B. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 - 3i}{5} \end{cases}$ C. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm 3i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 + 3i}{5} \end{cases}$ D. $\begin{cases} z_{1,2} = \pm \frac{1}{3}i \\ z_{3,4} = \frac{\pm 4 - 3i}{5} \end{cases}$

Câu 13. Tìm số phức z thỏa mãn $z^2 + 1 = -1 + 2\sqrt{3}i$?

A. $1 + \sqrt{3}i$ và $1 - \sqrt{3}i$ B. $1 + \sqrt{3}i$ và $-1 - \sqrt{3}i$
 C. $-1 + \sqrt{3}i$ và $1 - \sqrt{3}i$ D. $1 - \sqrt{3}i$ và $-1 - \sqrt{3}i$

Câu 14. Gọi z_1 và z_2 là các nghiệm của phương trình $z^2 - 2z + 5 = 0$. Tính $P = z_1^4 + z_2^4$

A. -14 B. 14 C. -14i D. 14i

Câu 15. Gọi z_1 là nghiệm phức có phần ảo âm của phương trình $z^2 + 2z + 3 = 0$. Tọa độ điểm M biểu diễn số phức z_1 là:

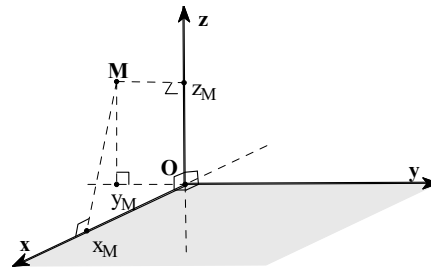
A. $M(-1; 2)$ B. $M(-1; -2)$ C. $M(-1; -\sqrt{2})$ D. $M(-1; -\sqrt{2}i)$

CHỦ ĐỀ 6: TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Dạng toán 1. CÁC VẤN ĐỀ CƠ BẢN VỀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ OXYZ

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

1- Hệ trục *Oxyz*: Gốc tọa độ $O(0;0;0)$.



* Điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ trong đó: $\begin{cases} x_M : \text{hoành độ} \\ y_M : \text{tung độ} \\ z_M : \text{cao độ} \end{cases}$

$$\vec{OM} = x_M \vec{i} + y_M \vec{j} + z_M \vec{k}$$

* Trục tọa độ: $\begin{cases} \text{Trục Ox:} & \begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{Trục Oy:} & \begin{cases} x = 0 \\ y = t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{cases} \\ \text{Trục Oz:} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \in \mathbb{R} \end{cases} \end{cases}$

* Mặt phẳng tọa độ: $\text{Mp}(Oxy): z = 0$ $\text{Mp}(Oxz): y = 0$ $\text{Mp}(Oyz): x = 0$

2-Các phép toán: Cho các vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3); \vec{b}(b_1; b_2; b_3); k \in \mathbb{R}$.

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}(a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3). \quad k\vec{a} = (ka_1; ka_2; ka_3).$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 \quad (\text{Tích vô hướng}) \quad |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}.$$

3-Hệ quả: $A(x_A; y_A; z_A); B(x_B; y_B; z_B); C(x_C; y_C; z_C)$.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \Rightarrow AB = |\vec{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Điểm M chia đoạn thẳng AB theo tỷ số k ($k \neq 1$) $\Leftrightarrow \vec{MA} = k \cdot \vec{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A - kx_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - ky_B}{1 - k} \\ z_M = \frac{z_A - kz_B}{1 - k} \end{cases}$

<p>Hệ quả 1: Công thức trung điểm:</p> $I(x_I; y_I; z_I) \text{ của đoạn } AB. \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \\ z_I = \frac{z_A + z_B}{2} \end{cases}$	<p>Hệ quả 2: Công thức trọng tâm: $G(x_G; y_G; z_G)$ của tam giác ABC.</p> $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases}$
--	---

4-Góc giữa hai vectơ: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3); \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$.

Gọi $\varphi = (\vec{a}, \vec{b})$. Lúc đó: $\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2} \cdot \sqrt{(b_1)^2 + (b_2)^2 + (b_3)^2}}$

* Đặc biệt: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$

5- Điều kiện để hai vectơ $\vec{a}(a_1; a_2; a_3); \vec{b}(b_1; b_2; b_3)$ cùng phương:

$$\exists k \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases} \text{ hay } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \text{ nếu } b_1, b_2, b_3 \neq 0$$

6- Tích có hướng của hai vecto: $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$.

* Công thức: (Quy tắc: **2-3; 3-1; 1-2**)

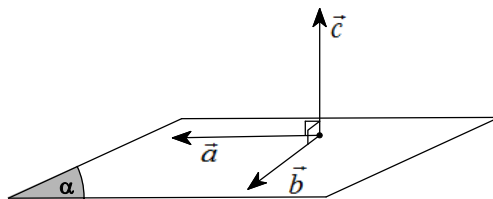
$$\left. \begin{matrix} \vec{a}(a_1; a_2; a_3) \\ \vec{b}(b_1; b_2; b_3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] = \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \\ = (a_2b_3 - b_2a_3; a_3b_1 - b_3a_1; a_1b_2 - b_1a_2)$$

• Tính chất:

✓ $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \Rightarrow \begin{cases} \vec{c} \perp \vec{a} \\ \vec{c} \perp \vec{b} \end{cases}$

✓ \vec{a}, \vec{b} cùng phương $\Leftrightarrow [\vec{a}, \vec{b}] = \vec{0}$.

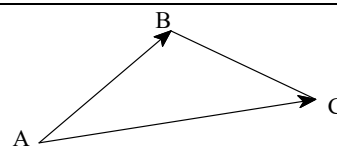
✓ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow \vec{c} \cdot [\vec{a}, \vec{b}] = 0$.



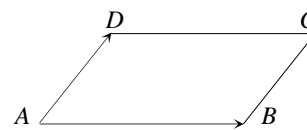
7- Một số công thức cần lưu ý:

- Diện tích tam giác ABC:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| [\vec{AB}, \vec{AC}] \right\|$$

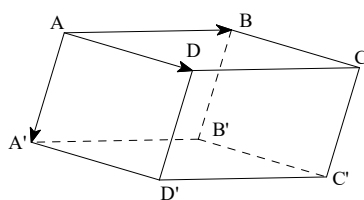


- Diện tích của hình bình hành ABCD là $S_{\square ABCD} = \left\| [\vec{AB}, \vec{AD}] \right\|$.



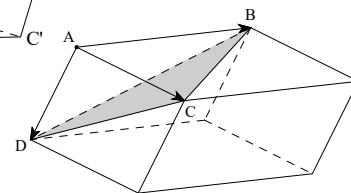
- Thể tích hình hộp ABCD.A'B'C'D':

$$V_{ABCD.A'B'C'D'} = \left\| [\vec{AB}, \vec{AD}] \cdot \vec{AA'} \right\|$$



- Thể tích tứ diện ABCD:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left\| [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} \right\| \quad (= \frac{1}{3} \text{ chiều cao} \cdot S \text{ đáy})$$



B- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong hệ tọa độ Oxyz cho các vecto $\vec{a} = (1; 2; 3)$; $\vec{b} = (-2; 4; 1)$; $\vec{c} = (-1; 3; 4)$. Vecto $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + 5\vec{c}$ có tọa độ là:

- A. (7; 3; 23) B. (7; 23; 3) C. (23; 7; 3) D. (3; 7; 23)

Câu 2. Trong không gian Oxyz cho ba vecto $\vec{a}(1; -1; 2)$, $\vec{b}(3; 0; -1)$, $\vec{c}(-2; 5; 1)$, vecto $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ có tọa độ là

- A. (6; -6; 0). B. (-6; 6; 0). C. (6; 0; -6). D. (0; 6; -6).

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho ba vecto $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 0; 1)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{n} = \vec{a} + \vec{b} + 2\vec{c} - 3\vec{i}$

- A. $\vec{n} = (-6; 2; 6)$. B. $\vec{n} = (6; 2; -6)$. C. $\vec{n} = (0; 2; 6)$. D. $\vec{n} = (-6; 2; -6)$.

Câu 4. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a} = (5; 7; 2)$, $\vec{b} = (3; 0; 4)$, $\vec{c} = (-6; 1; -1)$. Tọa độ của vecto $\vec{n} = 5\vec{a} + 6\vec{b} + 4\vec{c} - 3\vec{i}$ là:

- A. $\vec{n} = (16; 39; 30)$ B. $\vec{n} = (16; -39; 26)$ C. $\vec{n} = (-16; 39; 26)$ D. $\vec{n} = (16; 39; -30)$

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba vecto $\vec{a} = (5; 4; -1)$, $\vec{b} = (2; -5; 3)$ và \vec{c} thỏa hệ thức $\vec{a} + 2\vec{c} = \vec{b}$. Tọa độ \vec{c} là:

A. $(-3; -9; 4)$ B. $\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{2}; -2\right)$ C. $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{9}{2}; 2\right)$ D. $\left(-\frac{3}{4}; -\frac{9}{4}; 1\right)$

Câu 6. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho các vectơ $\vec{a} = (1; 1 - 2)$; $\vec{b} = (-3; 0; -1)$ và điểm $A(0; 2; 1)$ tọa độ điểm M thỏa mãn: $\overrightarrow{AM} = 2\vec{a} - \vec{b}$ là:

A. $M(-5; 1; 2)$ B. $M(3; -2; 1)$ C. $M(1; 4; -2)$ D. $M(5; 4; -2)$

Câu 7. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{AO} = 3(\vec{i} + 4\vec{j}) - 2\vec{k} + 5\vec{j}$. Tọa độ của điểm A là

A. $(3, -2, 5)$ B. $(-3, -17, 2)$ C. $(3, 17, -2)$ D. $(3, 5, -2)$

Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác OAB có $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác OAB có tọa độ là:

A. $G\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$ B. $G\left(1; 0; -\frac{1}{3}\right)$ C. $G(3; 0; -1)$ D. $G\left(\frac{1}{3}; 0; -\frac{1}{3}\right)$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$ cho 3 điểm A, B, C thỏa: $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$; $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$; $\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ với $\vec{i}; \vec{j}; \vec{k}$ là các vectơ đơn vị. Xét các mệnh đề:

(I) $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 4)$; (II) $\overrightarrow{AC} = (1, 1, 2)$

Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Cả (I) và (II) đều đúng B. (I) đúng, (II) sai
C. Cả (I) và (II) đều sai D. (I) sai, (II) đúng

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 điểm $A(3; 1; 1)$, $B(7; 3; 9)$, $C(2; 2; 2)$. Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC :

A. $G(6; 3; 6)$ B. $G(4; 2; 4)$ C. $G(-4; -3; -4)$ D. $G(4; 3; -4)$

Câu 11. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC với $A(1; -4; 2)$, $B(-3; 2; 1)$, $C(3; -1; 4)$. Khi đó trọng tâm G của tam giác ABC là:

A. $G\left(\frac{1}{3}; -1; \frac{7}{3}\right)$ B. $G(3; -9; 21)$ C. $G\left(\frac{1}{2}; -1; \frac{7}{2}\right)$ D. $G\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{4}; \frac{7}{5}\right)$

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, độ dài vectơ \vec{a} là:

A. $\sqrt{6}$. B. 2 C. $-\sqrt{6}$. D. 4

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $A(1; 2; 0)$, $B(1; 0; -1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng?

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{5}$

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, khoảng cách giữa hai điểm $M(1; -1; \sqrt{3})$ và $N(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{3})$ bằng

A. $MN = 4$ B. $MN = \sqrt{6}$ C. $MN = 3\sqrt{2}$ D. $MN = \sqrt{5}$

Câu 15. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1; 0; -3)$, $B(2; 4; -1)$, $C(2; -2; 0)$. Độ dài các cạnh AB, AC, BC của tam giác ABC lần lượt là

A. $\sqrt{21}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$. B. $\sqrt{11}, \sqrt{14}, \sqrt{37}$. C. $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{37}$. D. $\sqrt{21}, \sqrt{13}, \sqrt{35}$.

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; -1; 6)$, $B(-3; -1; -4)$, $C(5; -1; 0)$. Tam giác ABC là:

A. Tam giác thường B. Tam giác cân C. Tam giác đều D. Tam giác vuông

Câu 17. Trong hệ trục $Oxyz$, M' là hình chiếu vuông góc của $M(3, 2, 1)$ trên Ox thì M' có tọa độ là:

Dạng toán 2. Phương trình mặt phẳng

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

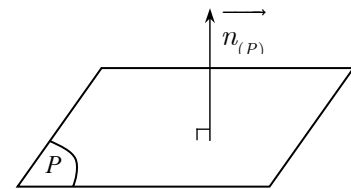
1) Vectơ pháp tuyến, cặp vectơ chỉ phương

— Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) nếu giá \vec{n} vuông góc với (P) .

— Hai vectơ \vec{a}, \vec{b} không cùng phương là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu giá của chúng song song hoặc nằm trên mặt phẳng (P) .

— Nếu \vec{a}, \vec{b} là một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (P) thì $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

— Nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ là 1 vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) thì $k\vec{n}, (k \neq 0)$ cũng là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .



của mặt
thì

2) Phương trình tổng quát của mặt phẳng: $(P): Ax + By + Cz + D = 0$.

— Nếu mặt phẳng (P) có phương trình $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ thì $\vec{n}_{(P)} = (A; B; C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) .

— Để viết phương trình mặt phẳng (P) , ta cần xác định 1 điểm đi qua và 1 vectơ pháp tuyến.

$$(P): \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \bullet \text{ VTPT: } \vec{n}_{(P)} = (A; B; C) \end{cases} \Rightarrow \boxed{(P): A.(x - x_0) + B.(y - y_0) + C.(z - z_0) = 0}$$

3) Các trường hợp đặc biệt:

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (P)	Tính chất mặt phẳng (P)
$D = 0$	$(P): Ax + By + Cz = 0$	(P) đi qua gốc tọa độ O
$A = 0$	$(P): By + Cz + D = 0$	$(P) \parallel Ox$ hoặc $(P) \supset Ox$
$B = 0$	$(P): Ax + Cz + D = 0$	$(P) \parallel Oy$ hoặc $(P) \supset Oy$
$C = 0$	$(P): Ax + By + D = 0$	$(P) \parallel Oz$ hoặc $(P) \supset Oz$
$A = B = 0$	$(P): Cz + D = 0$	$(P) \parallel (Oxy)$ hoặc $(P) \equiv (Oxy)$
$A = C = 0$	$(P): By + D = 0$	$(P) \parallel (Oxz)$ hoặc $(P) \equiv (Oxz)$
$B = C = 0$	$(P): Ax + D = 0$	$(P) \parallel (Oyz)$ hoặc $(P) \equiv (Oyz)$

★ Lưu ý:

— Nếu trong phương trình của mặt phẳng (P) không chứa ẩn nào thì (P) song song hoặc chứa trục tương ứng.

— Phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ là

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (\text{gọi là phương trình mặt theo đoạn chắn}).$$

— Khoảng cách từ điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ đến mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ được xác

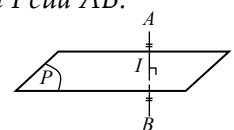
$$\text{định bởi công thức: } d(M; (P)) = \frac{|Ax_M + By_M + Cz_M + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

B – CÁC DẠNG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

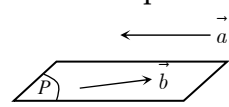
BT 1. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với tọa độ A, B cho trước:

Mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB là mp đi qua và vuông góc tại trung điểm I của AB .

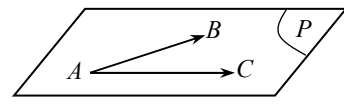
$$\xrightarrow{P^2} mp(P): \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2} \right) \\ \bullet \text{ VTPT: } \vec{n}_{(P)} = \vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) \end{cases}$$



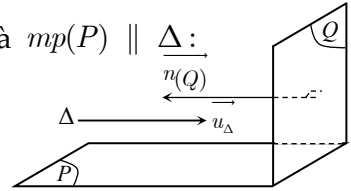
BT 2. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và có cặp vectơ chỉ phương \vec{a}, \vec{b} cho trước $\xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{a}, \vec{b}] \end{cases}$



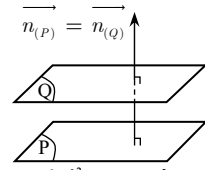
BT 3. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng $\xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } A, \text{ (hay } B \text{ hay } C) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(ABC)} = [\vec{AB}, \vec{AC}] \end{cases}$



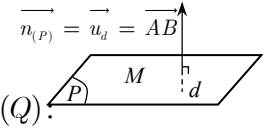
BT 4. Viết phương trình $mp(P)$ đi qua M , vuông góc $mp(Q)$ và $mp(P) \parallel \Delta : \xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M(x_0, y_0, z_0) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(Q)}, \vec{u}_{\Delta}] \end{cases}$



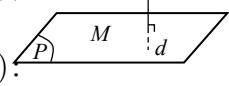
BT 5. Viết phương trình $mp(P)$ đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và song song với $(Q) : Ax + By + Cz + D = 0$ $\xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M(x_0, y_0, z_0) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = \vec{n}_{(Q)} = (A; B; C) \end{cases}$



BT 6. Viết phương trình $mp(P)$ đi qua M và vuông góc với đường thẳng d đi qua 2 điểm A và B $\xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = \vec{u}_d = \vec{AB} \end{cases}$

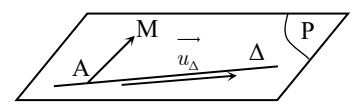


BT 7. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, B và vuông góc với $mp(Q) : \xrightarrow{PP} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } A, \text{ (hay } B) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{AB}, \vec{n}_{(Q)}] \end{cases}$

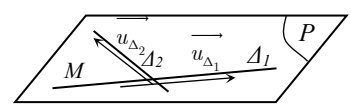


BT 8. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua điểm M và chứa đường thẳng $\Delta : \xrightarrow{P^2} \text{ Trên đường thẳng } \Delta \text{ lấy điểm } A \text{ và xác định VTCP } \vec{u}_{\Delta}$

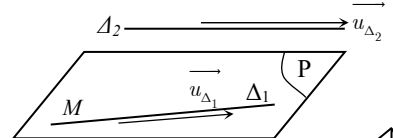
Khi đó $mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{AM}, \vec{u}_{\Delta}] \end{cases}$



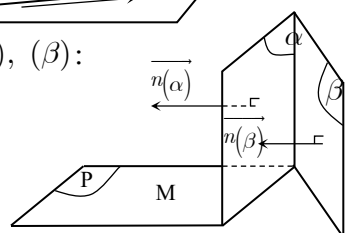
BT 9. Viết phương trình của mặt phẳng (P) đi qua hai đường thẳng cắt nhau $\Delta_1, \Delta_2 : \xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \in \Delta_1, \text{ (hay } M \in \Delta_2) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$



BT 10. Cho 2 đường thẳng chéo nhau Δ_1, Δ_2 . Hãy viết phương trình (P) chứa Δ_1 và song song $\Delta_2 : \Delta_2 \xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \in \Delta_1, \text{ (hay } M \in \Delta_2) \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{\Delta_1}, \vec{u}_{\Delta_2}] \end{cases}$



BT 11. Viết phương trình $mp(P)$ qua M và vuông góc với hai mp $mp(\alpha), (\beta) : \xrightarrow{P^2} mp(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT : } \vec{n}_{(P)} = [\vec{n}_{(\alpha)}, \vec{n}_{(\beta)}] \end{cases}$



BT 12. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm M và giao tuyến của hai mặt phẳng (α) , (β)
 \xrightarrow{PP} **Chọn** A, B thuộc giao tuyến hai mặt phẳng (α) và $(\beta) \Rightarrow A, B \in (P)$. **Cụ thể:**

$$\text{Cho: } z = z_0 \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -(C_1z_0 + D_1) \\ A_2x + B_2y = -(C_2z_0 + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases} \Rightarrow A(\dots; \dots; \dots) \in (P)$$

$$\text{Cho: } x = x_0 \Rightarrow \begin{cases} B_1y + C_1z = -(A_1x_0 + D_1) \\ B_2y + C_2z = -(A_2x_0 + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dots \\ z = \dots \end{cases} \Rightarrow B(\dots; \dots; \dots) \in (P)$$

$$\text{Khi đơ mp}(P) : \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \\ \bullet \text{ VTPT: } \vec{n}_{(P)} = [\vec{AB}, \vec{AM}] \end{cases}$$

C – BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian Oxyz mặt phẳng (P) đi qua điểm $M(-1;2;0)$ và có VTPT $\vec{n} = (4;0;-5)$ có phương trình là:

- A. $4x-5y-4=0$ B. $4x-5z-4=0$ C. $4x-5y+4=0$ D. $4x-5z+4=0$

Câu 2. Cho ba điểm $A(2;1;-1)$; $B(-1;0;4)$; $C(0;-2-1)$. Phương trình mặt phẳng nào đi qua A và vuông góc BC

- A. $x-2y-5z-5=0$ B. $2x-y+5z-5=0$ C. $x-3y+5z+1=0$ D. $2x+y+z+7=0$

Câu 3. Trong không gian Oxyz, cho điểm $G(1;1;1)$, mặt phẳng qua G và vuông góc với đường thẳng OG có phương trình:

- A. $x-y+z=0$ B. $x+y+z-3=0$ C. $x+y+z=0$ D. $x+y-z-3=0$

Câu 4. Mặt phẳng đi qua $D(2;0;0)$ vuông góc với trục Oy có phương trình là:

- A. $z=0$ B. $y=2$ C. $y=0$ D. $z=2$

Câu 5. Viết phương trình mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB với $A(1;2;-4)$, $B(5;4;2)$.

- A. $10x+9y+5z-70=0$ B. $4x+2y+6z-11=0$ C. $2x+y+3z-6=0$ D. $2x+3z-3=0$

Câu 6. Trong không gian Oxyz mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là ,với $A(1;2;-3)$, $B(-3;2;9)$

- A. $-x-3z-10=0$ B. $-4x+12z-10=0$ C. $-x-3z-10=0$ D. $-x+3z-10=0$

Câu 7. Cho hai điểm $A(-1;3;1)$, $B(3;-1;-1)$. Khi đó mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB có phương trình là

- A. $2x+2y-z=0$ B. $2x+2y+z=0$ C. $2x-2y-z=0$ D. $2x-2y-z+1=0$

Câu 8. Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm $B(1; 2; -1)$ và cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất.

- A. $x+2y-z-6=0$ B. $x+2y-2z-7=0$ C. $2x+y-z-5=0$ D. $x+y-2z-5=0$

Câu 9. Cho 3 điểm $A(1; -2; 1)$, $B(-1; 3; 3)$, $C(2; -4; 2)$. Một VTPT \vec{n} của mặt phẳng (ABC) là

- A. $\vec{n} = (-1;9;4)$ B. $\vec{n} = (9;4;1)$ C. $\vec{n} = (4;9;-1)$ D. $\vec{n} = (9;4;-1)$

Câu 10. Cho mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(0;0;-1)$ và song song với giá của hai vectơ $\vec{a} = (1;-2;3)$ và $\vec{b} = (3;0;5)$. Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $-5x+2y+3z+3=0$ B. $5x-2y-3z-21=0$ C. $5x-2y-3z+21=0$ D. $10x-4y-6z+21=0$

Câu 11. Cho 3 điểm $A(1; 6; 2)$, $B(5; 1; 3)$, $C(4; 0; 6)$ phương trình mặt phẳng (ABC) là

- A. $14x+13y+9z+110=0$ B. $14x+13y-9z-110=0$
 C. $14x-13y+9z-110=0$ D. $14x+13y+9z-110=0$

Câu 12. Cho ba điểm $A(0;2;1)$, $B(3;0;1)$, $C(1;0;0)$. Phương trình mặt phẳng (ABC) là:

- A. $2x+3y-4z-2=0$ B. $4x+6y-8z+2=0$ C. $2x-3y-4z+2=0$ D. $2x-3y-4z+1=0$

Câu 13. Cho hai điểm $A(1;-1;5)$ và $B(0;0;1)$. Mặt phẳng (P) chứa A, B và song song với Oy có phương trình là

- A. $4x+y-z+1=0$ B. $2x+z-5=0$ C. $4x-z+1=0$ D. $y+4z-1=0$

Câu 14. Phương trình mặt phẳng (P) chứa trục Oy và điểm $M(1;-1;1)$ là:

- A. $x+z=0$ B. $x-z=0$ C. $x-y=0$ D. $x+y=0$

Câu 15. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 3x-2y+2z+7=0$ và $(\beta): 5x-4y+3z+1=0$. Phương trình mặt phẳng đi qua gốc tọa độ O và vuông góc cả (α) và (β) là:

A. $2x - y + 2z = 0$ B. $2x + y - 2z = 0$ C. $2x + y - 2z + 1 = 0$ D. $2x - y - 2z = 0$

Câu 16. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua $M(3; -1; -5)$ và vuông góc với hai mặt phẳng (Q): $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ và (R): $5x - 4y + 3z + 1 = 0$. Phương trình mặt phẳng (P):

A. $2x + y - 2z - 15 = 0$ B. $2x + y - 2z + 15 = 0$ C. $x + y + z - 7 = 0$ D. $x + 2y + 3z + 2 = 0$

Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, phương trình mặt phẳng đi qua hai điểm $E(1; 3; -5)$; $F(-2; -1; 1)$ và song song với trục xOx là:

A. $3y + 2z - 1 = 0$ B. $-3y + 2z + 1 = 0$ C. $2x + 3y + 2z + 1 = 0$ D. $3y + 2z + 1 = 0$

Câu 18. Trong không gian Oxyz, cho mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(4, -1, 1)$, $B(3, 1, -1)$ và song song với trục Ox. Phương trình nào sau đây là phương trình của mặt phẳng (P):

A. $x + y + z = 0$ B. $x + y = 0$ C. $y + z = 0$ D. $x + z = 0$

Câu 19. Cho tứ diện ABCD với $A(5; 1; 3)$, $B(1; 6; 2)$, $C(5; 0; 4)$, $D(4; 0; 6)$. Viết phương trình mặt phẳng đi qua C, D và song song với AB.

A. $10x - 9z + 5z = 0$ B. $5x - 3y + 2z = 0$ C. $10x + 9y + 5z - 70 = 0$ D. $10x + 9y + 5z - 50 = 0$

Câu 20. Khoảng cách từ điểm $M(-2; -4; 3)$ đến mặt phẳng (P) có phương trình $2x - y + 2z - 3 = 0$ là:

A. 3 B. 1 C. 2 D. Đáp án khác

Câu 21. Khoảng cách từ điểm $M(-1; 2; -4)$ đến $mp(\alpha): 2x - 2y + z - 8 = 0$ là:

A. 4 B. 3 C. 6 D. 5

Câu 22. Gọi H là hình chiếu vuông góc của $A(2; -1; -1)$ trên (P): $16x - 12y - 15z - 4 = 0$. Độ dài đoạn AH bằng?

A. $\frac{22}{5}$ B. $\frac{11}{5}$ C. $\frac{11}{25}$ D. 55

Câu 23. Tìm góc giữa hai mặt phẳng $(\alpha): 2x - y + z + 3 = 0$; $(\beta): x + y + 2z - 1 = 0$:

A. 30° B. 90° C. 45° D. 60°

Câu 24. Vị trí tương đối của 2 mặt phẳng: $(\alpha): 2x - y + z + 3 = 0$ và $(\beta): 2x + y - z - 5 = 0$.

A. $(\alpha) // (\beta)$ B. $(\alpha) \equiv (\beta)$ C. $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau D. $(\alpha), (\beta)$ chéo nhau

Câu 25. Cho hai mặt phẳng song song (P): $nx + 7y - 6z + 4 = 0$ và (Q): $3x + my - 2z - 7 = 0$. Khi đó giá trị của m và n là:

A. $m = \frac{7}{3}; n = 1$ B. $n = \frac{7}{3}; m = 9$ C. $m = \frac{3}{7}; n = 9$ D. $m = \frac{7}{3}; n = 9$

Câu 26. Trong không gian Oxyz, xác định các cặp giá trị $(m; l)$ để các cặp mặt phẳng sau đây song song với nhau: $2x + ly + 3z - 5 = 0; mx - 6y - 6z - 2 = 0$

A. $(3, 4)$ B. $(4; -3)$ C. $(-4, 3)$ D. $(4, 3)$

Câu 27. Tìm m để cặp mặt phẳng sau vuông góc với nhau: $7x - 3y + mz - 3 = 0; x - 3y + 4z + 5 = 0$.

A. $m = 6$ B. $m = -4$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

Câu 28. Mặt phẳng qua $A(1; -2; -5)$ và song song với mặt phẳng (P): $x - y + 1 = 0$ cách (P) một khoảng có độ dài là:

A. 2 B. $\sqrt{2}$ C. 4 D. $2\sqrt{2}$

Câu 29. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + 3y + 3z - 5 = 0$; $(\beta): 2x + 3y + 3z - 1 = 0$. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng này là:

A. $\frac{\sqrt{22}}{11}$ B. 4 C. $\frac{2}{11}$ D. $\frac{2\sqrt{22}}{11}$

Câu 30. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P): $2x - y + 3z + 5 = 0$ và (Q): $2x - y + 3z + 1 = 0$ bằng:

A. $\frac{6}{\sqrt{14}}$ B. 6 C. 4 D. $\frac{4}{\sqrt{14}}$

Câu 31. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai mặt phẳng (P): $5x + 5y - 5z - 1 = 0$ và (Q): $x + y - z + 1 = 0$. Khi đó khoảng cách giữa (P) và (Q) là:

A. $\frac{2\sqrt{3}}{15}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{2}{15}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

Câu 32. Mặt phẳng (P) song song và cách đều hai mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 4z + 5 = 0$ và $(\beta): 2x + y - 4z + 7 = 0$ có phương trình là:

A. $2x + y - 4z + 6 = 0$ B. $2x + y - 4z = 0$ C. $2x + y - 4z + 12 = 0$ D. $2x + y - 4z - 12 = 0$

Câu 33. Cho hai mặt phẳng $(\alpha): m^2x - y + (m^2 - 2)z + 2 = 0$ và $(\beta): 2x + m^2y - 2z + 1 = 0$. Mặt phẳng (α) vuông góc với (β) khi:

A. $|m| = \sqrt{2}$ B. $|m| = 2$ C. $|m| = 1$ D. $|m| = \sqrt{3}$

Câu 34. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho ba điểm $M(1,0,0)$, $N(0,2,0)$, $P(0,0,3)$. Mặt phẳng (MNP) có phương trình là:

A. $6x + 3y + 2z + 1 = 0$ B. $6x + 3y + 2z - 6 = 0$ C. $6x + 3y + 2z - 1 = 0$ D. $x + y + z - 6 = 0$

Câu 35. Gọi (α) là mặt phẳng cắt ba trục tọa độ tại 3 điểm $M(8; 0; 0)$, $N(0; -2; 0)$, $P(0; 0; 4)$. Phương trình của mặt phẳng (α) là:

A. $\frac{x}{8} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{4} = 0$ B. $x - 4y + 2z - 8 = 0$ C. $x - 4y + 2z = 0$ D. $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{2} = 1$

Câu 36. Trong không gian Oxyz, cho điểm $M(8,-2,4)$. Gọi A, B, C lần lượt là hình chiếu của M trên các trục Ox, Oy, Oz. Phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B và C là:

A. $x + 4y + 2z - 8 = 0$ B. $x - 4y + 2z - 8 = 0$ C. $x - 4y + 2z - 8 = 0$ D. $x + 4y - 2z - 8 = 0$

Câu 37. Biết tam giác ABC có ba đỉnh A, B, C thuộc các trục tọa độ và trọng tâm tam giác là $G(-1;-3;2)$. Khi đó phương trình mặt phẳng (ABC) là :

A. $2x - 3y - z - 1 = 0$ B. $x + y - z - 5 = 0$ C. $6x - 2y - 3z + 18 = 0$ D. $6x + 2y - 3z + 18 = 0$

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $M(2;2;2)$. Khi đó mặt phẳng đi qua M cắt các tia Ox, Oy, Oz tại các điểm A, B, C sao cho thể tích tứ diện OABC nhỏ nhất có phương trình là:

A. $x + y + z - 1 = 0$ B. $x + y + z + 6 = 0$ C. $x + y + z = 0$ D. $x + y + z - 6 = 0$

Câu 39. Cho $A(a;0;0); B(0;b;0); C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Biết mặt phẳng (ABC) qua điểm $I(1;3;3)$ và thể tích tứ diện OABC đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó phương trình (ABC) là :

A. $x + 3y + 3z - 21 = 0$ B. $3x + y + z + 9 = 0$ C. $3x + 3y + z - 15 = 0$ D. $3x + y + z - 9 = 0$

Câu 40. Cho $A(2;0;0), M(1;1;1)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và M sao cho (P) cắt trục Oy, Oz lần lượt tại hai điểm B, C sao cho diện tích của tam giác ABC bằng $4\sqrt{6}$.

A. $(P_1): 2x + y + z - 4 = 0$
 B. $(P_3): -6x + (3 + \sqrt{21})y + (3 - \sqrt{21})z + 12 = 0$
 C. $(P_2): -6x + (3 - \sqrt{21})y + (3 + \sqrt{21})z + 12 = 0$

D. Cả ba đáp án trên

Câu 41. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng d là giao tuyến của 2 mặt $(\alpha): x - 2y + 2 = 0$, $(\beta): x + 2z - 4 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(1;-1;2)$ và chứa d thì phương trình của (Q) là:

A. $2x + y + 5z - 11 = 0$ B. $2x + y + 5z + 11 = 0$ C. $-2x + y + 5z + 11 = 0$ D. $2x - y + 5z + 11 = 0$

Câu 42. Phương trình mặt phẳng qua giao tuyến của hai mặt phẳng $(P): x - 3y + 2z - 1 = 0$ và $(Q): 2x + y - 3z + 1 = 0$ và song song với trục Ox là

A. $7x + y + 1 = 0$ B. $7y - 7z + 1 = 0$ C. $7x + 7y - 1 = 0$ D. $x - 3 = 0$

Câu 43. Gọi (d) là giao tuyến của hai mặt phẳng $x + 2y - 3z + 1 = 0$ và $2x - 3y + z + 1 = 0$. Xác định m để có mặt phẳng (Q) qua (d) và vuông góc với $\vec{a} = (m; 2; -3)$

A. $m = 6$ B. $m = \frac{85}{3}$ C. $m = 1$ D. $m = \frac{1}{2}$

Câu 44. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;-2;3)$, $C(1;1;1)$. Phương trình mặt phẳng (P) chứa A, B sao cho khoảng cách từ C tới (P) là $\frac{2}{\sqrt{3}}$

A. $x + y + z - 1 = 0$ hoặc $-23x + 37y + 17z + 23 = 0$
 B. $x + y + 2z - 1 = 0$ hoặc $-2x + 3y + 7z + 23 = 0$
 C. $x + 2y + z - 1 = 0$ hoặc $-2x + 3y + 6z + 13 = 0$
 D. $2x + 3y + z - 1 = 0$ hoặc $3x + y + 7z + 6 = 0$

Dạng toán 3. phương trình đường thẳng và bài toán liên quan

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

— Để viết phương trình đường thẳng (d) , ta cần xác định điểm đi qua $M(x_0; y_0; z_0)$ và một véctơ chỉ phương (có giá song song hoặc trùng với d) là $\vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3)$.

$$(d): \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \bullet \text{ VTCT: } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases} \Rightarrow (d): \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases}, (t \in \mathbb{R}): \text{ gọi là phương trình tham số.}$$

— Nếu $a_1 a_2 a_3 \neq 0$ thì (d) được viết dạng chính tắc là $(d): \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$.

B – CÁC DẠNG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

BT 1. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M và có VTCP \vec{u}_d cho trước:

$$\xrightarrow{p^2} (d): \begin{cases} \bullet \text{ Qua } M(x_0; y_0; z_0) \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = (a_1; a_2; a_3) \end{cases} \Rightarrow d: \begin{cases} x = x_0 + a_1 t \\ y = y_0 + a_2 t \\ z = z_0 + a_3 t \end{cases} (t \in \mathbb{R}): \text{ dạng tham số}$$

BT 2. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua hai điểm A và B :

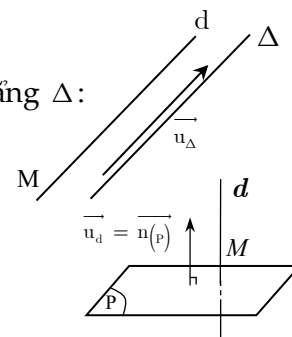
$$\xrightarrow{p^2} d: \begin{cases} \bullet \text{ Qua } A \text{ (hay } B) \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = \vec{AB} \end{cases}$$


BT 3. (TN – 2015) Cho $A(1; -2; 1)$, $B(2; 1; 3)$ và mặt phẳng $(P): x - y + 2z - 3 = 0$. Viết phương trình đường thẳng AB và tìm tọa độ giao điểm của AB với mặt phẳng (P) .

Đáp số: $AB: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{2}$ và $AB \cap (P) = M(0; -5; -1)$.

BT 4. Viết phương trình tham số của d đi qua M và song song với đường thẳng Δ :

$$\xrightarrow{p^2} d: \begin{cases} \bullet \text{ Qua } M \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = \vec{u}_\Delta \end{cases}$$



BT 5. Viết phương trình tham số của d qua M và vuông góc với $mp(P)$:

$$\xrightarrow{p^2} \Delta: \begin{cases} \bullet \text{ Qua } M \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = \vec{n}_{(P)} \end{cases}$$

BT 6. Viết phương trình tham số của đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) :

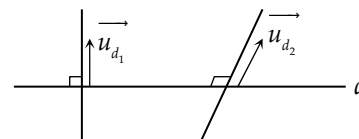
$$\xrightarrow{p^2} \text{ Tìm VTPT của } \begin{cases} (P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(P)} = (A_1; B_1; C_1) \\ (Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_{(Q)} = (A_2; B_2; C_2) \end{cases}$$

Lấy A thuộc giao tuyến, bằng cách cho: $z = z_0 \Rightarrow \begin{cases} A_1x + B_1y = -(C_1z_0 + D_1) \\ A_2x + B_2y = -(C_2z_0 + D_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$

$$\Rightarrow A(\dots; \dots; \dots). \text{ Khi đó, đường thẳng } d: \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } A \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = [\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}] \end{cases}$$

BT 7. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua điểm M và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước trong các trường hợp sau:

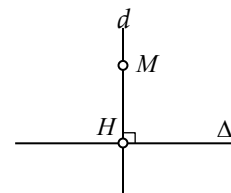
$$\xrightarrow{p^2} (d): \begin{cases} \bullet \text{ Đi qua } M \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = [\vec{u}_{d_1}, \vec{u}_{d_2}] \end{cases}$$



BT 8. Viết phương trình tham số của đường thẳng d đi qua M , vuông góc và cắt đường thẳng Δ

\xrightarrow{p} Tìm H là tọa độ hình chiếu của M lên đường Δ .

$$\xrightarrow{p} \text{ Khi đó đường } (d): \begin{cases} \bullet \text{ Qua } M \\ \bullet \text{ VTCP: } \vec{u}_d = \vec{MH} \end{cases}$$



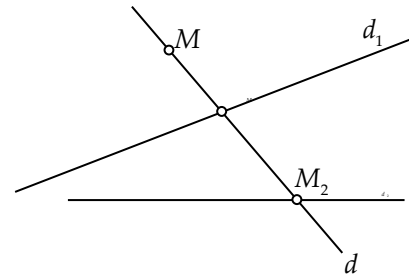
BT 9. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm M và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2 cho trước:

$\xrightarrow{P^2}$ Gọi $M_1 \in d_1$ và $M_2 \in d_2 \Rightarrow M_1, M_2$ (dạng tham số)

Do 3 điểm M, M_1, M_2 thẳng hàng $\Leftrightarrow [\overrightarrow{MM_1}, \overrightarrow{MM_2}] = \vec{0}$,

Suy ra tọa độ M_1, M_2 .

Khi đó đường thẳng (d): $\begin{cases} \text{Qua } M \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = \overrightarrow{MM_1} \end{cases}$



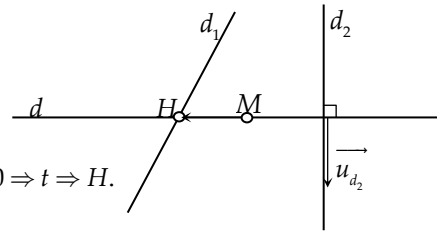
BT 10. Viết phương trình đường thẳng d qua điểm M , cắt đường thẳng d_1 và vuông góc d_2 :

$\xrightarrow{P^2}$ Chuyển d_1 : $\begin{cases} x = x_1 + a_1t \\ y = y_1 + a_2t \\ z = z_1 + a_3t \end{cases}$ về dạng tham số.

Giả sử $d \cap d_1 = \{H\} \Rightarrow H(x_1 + a_1t; x_2 + a_2t; x_3 + a_3t)$.

Do d qua M, H và $\perp d_2$ nên $MH \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_{d_2} = 0 \Rightarrow t \Rightarrow H$.

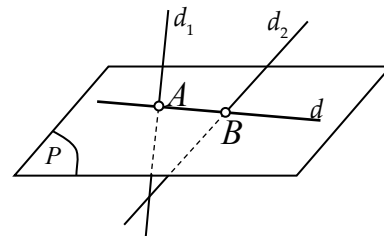
Khi đó đường thẳng d đi qua hai điểm M và H .



BT 11. Viết phương trình đường thẳng d , biết d nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả 2 đường thẳng d_1, d_2 trong các trường hợp sau:

$\xrightarrow{P^2}$ Tìm $\begin{cases} \{A\} = d_1 \cap (P) \\ \{B\} = d_2 \cap (P) \end{cases}$

Khi đó đường thẳng (d): $\begin{cases} \text{Qua } A \\ \text{VTCP: } \vec{u}_d = \overrightarrow{AB} \end{cases}$

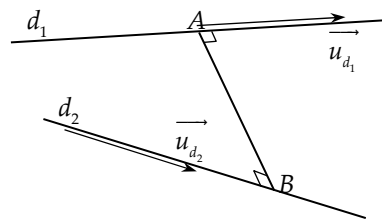


BT 12. Viết phương trình đường thẳng d là đường vuông góc chung của 2 đường chéo nhau d_1, d_2 :

• Gọi $A \in d_1, B \in d_2$ dưới dạng tham số.

• Từ điều kiện $\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{d_1} \\ \overrightarrow{AB} \perp \vec{u}_{d_2} \end{cases} \Rightarrow A, B$.

• Khi đó d là đường thẳng AB .



BT 13. Viết phương trình đường thẳng d hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P):

Nếu $\Delta \cap (P) = \{I\}$.

- Tìm tọa độ điểm I .
- Chọn một điểm M trên Δ , ($M \neq I$).
- Tìm hình chiếu của M lên mặt phẳng (P) là H .
- Phương trình đường thẳng d đi qua hai điểm I và H .

Nếu $\Delta \cap (P) = \emptyset \Rightarrow \Delta \parallel (P)$. Suy ra đường thẳng d cần tìm là đường thẳng song song với Δ .

- Chọn 1 điểm M bất kỳ trên đường thẳng Δ .
- Tìm hình chiếu vuông góc của M lên mặt phẳng (P).
- Phương trình đường thẳng cần tìm đi qua H và có VTCP: $\vec{u}_d = \vec{u}_\Delta$.

Nếu $\Delta \perp (P)$ thì đường thẳng d , suy biến thành điểm I .

C- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian Oxyz đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}(1;2;3)$ có phương trình:

- A. $d: \begin{cases} x=0 \\ y=2t \\ z=3t \end{cases}$ B. $d: \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$ **C. $d: \begin{cases} x=t \\ y=3t \\ z=2t \end{cases}$** D. $d: \begin{cases} x=-t \\ y=-2t \\ z=-3t \end{cases}$

Câu 2. Cho đường thẳng (d): $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-3+5t \end{cases}$ thì (d) có phương trình chính tắc là:

- A. $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-3}{5}$ **B. $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$** C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{1}$ D. $\frac{x+2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{1}$

Câu 3. Trong không gian (Oxyz) cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$

Điểm M nào sau đây thuộc đường thẳng Δ?

- A. M(1;-2;3) **B. M(1;2;3)** C. M(1;2;-3) D. M(2;1;3)

Câu 4. Trong không gian (Oxyz) cho đường thẳng Δ có phương trình tham số $\begin{cases} x=1+t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$

thẳng Δ có phương trình chính tắc là:

- A. $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-2} = \frac{z+3}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$ C. $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{3}$ **D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{1}$**

Câu 5. Cho đường thẳng d: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=3+7t \\ z=-2-3t \end{cases}$ và hai điểm M(1;10;-5), N(-5;-11;-5) ta có:

- A. $M \in d$ và $N \in d$ **B. $M \in d$ và $N \notin d$** C. $M \notin d$ và $N \notin d$ D. $M \notin d$ và $N \in d$

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng d có phương trình: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{1}$.

Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng d?

- A. A(-3;-1;3)** B. A(3;1;-3) C. A(2;1;1) D. A(-2;-1;-1)

Câu 7. Cho đường thẳng d đi qua M(2; 0; -1) và có vectơ chỉ phương $\vec{a}(4;-6;2)$. Phương trình tham số của đường thẳng d là:

- A. $\begin{cases} x=-2+2t \\ y=-3t \\ z=1+t \end{cases}$ **B. $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-3t \\ z=-1+t \end{cases}$** C. $\begin{cases} x=4+2t \\ y=-6-3t \\ z=2+t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=-2+4t \\ y=-6t \\ z=1+2t \end{cases}$

Câu 8. Trong không gian Oxyz, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm

A(1;2;3). Đường thẳng Δ đi qua A, vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là:

- A. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$ **B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$** C. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng

(P): $x-y-z-1=0$. Đường thẳng Δ qua A(1,1,1) song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d. Vectơ chỉ phương của Δ là:

- A. (1,-1,-1) **B. (2,-5,-3)** C. (2,1,3) D. (4,10,-6)

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{3}$ và mặt phẳng $P: x - y - z - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua $A(1;1;-2)$, song song với mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{-1}$

B. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

C. $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$

D. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{-3}$

Câu 11. Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(1;3;2), B(1;2;1), C(1;1;3)$. Phương trình đường thẳng đi qua trọng tâm G của tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC) là:

A. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 2 - t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$

Câu 12. Trong không gian cho hai đường thẳng: $d_1: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - t \end{cases}$; $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{3}$. Phương trình của đường thẳng d đi qua $O(0;0;0)$ và vuông góc với cả d_1 và d_2 là:

A. $\begin{cases} x = t \\ y = -5t \\ z = t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 5t \\ z = t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 1 \\ y = -5t \\ z = 1 \end{cases}$

Câu 13. Cho hai điểm $A(3;3;1), B(0;2;1)$ và mp(P): $x + y + z - 7 = 0$. Đường thẳng d nằm trên mp(P) sao cho mọi điểm của d cách đều hai điểm A, B có phương trình là:

A. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$

Câu 14. Trong hệ Oxyz cho các điểm $A(3;3;1); B(0;2;1)$ và $(P): x + y + z - 7 = 0$. Gọi d là đường thẳng nằm trong (P) sao cho $d(A;d) = d(B;d)$. Khi đó phương trình đường thẳng d là:

A. $\begin{cases} x = -t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

B. $\begin{cases} x = 2t \\ y = 7 - 3t \\ z = t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$

D. $\begin{cases} x = t \\ y = 7 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$

Câu 15. Biết đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y - z - 1 = 0$ và $(\beta): x + 4y - 3z + 2 = 0$. Khi đó, vector chỉ phương của đường thẳng d có tọa độ là:

A. $(0;4;5)$

B. $(2;-4;-5)$

C. $(1;-4;-5)$

D. $(-1;-4;5)$

Câu 16. Trong không gian Oxyz cho hai mặt phẳng $(P): 2x + y - z - 3 = 0$ và $(Q): x + y + x - 1 = 0$. Phương trình chính tắc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) là:

A. $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{1}$

B. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}$

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z+1}{1}$

D. $\frac{x}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-1}{-1}$

Câu 17. Điểm nào nằm trên đường thẳng (d) là giao tuyến của $x + 2y - z + 3 = 0$ và $2x - 3y - 2z + 6 = 0$.

A. $(0; 1; 5)$

B. $(-1; -1; 0)$

C. $(1; 2; 1)$

D. $(1; 0; 4)$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(0;1;1)$ và 2 đường thẳng $(d_1), (d_2)$ với: $(d_1): \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$; (d_2) là giao tuyến của 2 mặt phẳng $(P): x + 1 = 0$ và $(Q): x + y - z + 2 = 0$. Gọi (d) là đường thẳng qua M vuông góc (d_1) và cắt (d_2) . Trong số các điểm $A(0;1;1), B(-3;3;6), C(3;-1;-3), D(6;-3;0)$, có mấy điểm nằm trên (d) ?

A. 2

B. 0

C. 1

D. 3

Câu 19. Trong không gian Oxyz tọa độ giao điểm M của đường thẳng $d: \frac{x-12}{4} = \frac{y-9}{3} = \frac{z-1}{1}$ và mặt phẳng $(P): 3x + 5y - z - 2 = 0$ là:

A. $(1; 0; 1)$

B. $(0; 0; -2)$

C. $(1; 1; 6)$

D. $(12; 9; 1)$

Câu 20. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + z + 5 = 0$ và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{-3}. \text{ Tọa độ giao điểm của } d \text{ và } (\alpha) \text{ là}$$

- A. $(4, 2, -1)$ B. $(-17, 9, 20)$ C. $(-17, 20, 9)$ D. $(-2, 1, 0)$

Câu 21. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng

$$(P): x + 2y - z - 3 = 0. \text{ Khi đó tọa độ giao điểm } M \text{ của } d \text{ và } (P) \text{ là:}$$

- A. $M(-3; 1; -7)$ B. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ C. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right)$ D. $M\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{7}{2}\right)$

Câu 22. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{3}$ đi qua điểm $M(2; m; n)$. Khi

đó giá trị của m, n lần lượt là :

- A. $m = -2; n = 1$ B. $m = 2; n = -1$ C. $m = -4; n = 7$ D. $m = 0; n = 7$

Câu 23. Trong không gian Oxyz, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}$, $d_2: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x + 3y - 2z + 4 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) và cắt d_1, d_2

- A. $\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{2}$ B. $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-2}{-3}$
 C. $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{3}$ D. $\frac{x+3}{6} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{3}$

Câu 24. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$, mp $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$ và điểm

$A(1; 2; -1)$. Đường thẳng Δ qua A cắt d và song song với mp (α) có phương trình là

- A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{1}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{-1}$ C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$ D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}$

Câu 25. Đường thẳng đi qua điểm $A(2; -5; 6)$, cắt Ox và song song với mặt phẳng $x + 5y - 6z = 0$ có vector chỉ phương là :

- A. $(1; 5; -6)$ B. $(1; 0; 0)$ C. $(-61; 5; -6)$ D. $(0; 18; 15)$

Câu 26. Phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(2; -5; 6)$, cắt Ox và song song với mặt phẳng $x + 5y - 6z = 0$ là :

- A. $\begin{cases} x = 2 - 61t \\ y = -5 + 5t \\ z = 6 - 6t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -5 \\ z = 6 \end{cases}$ C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{5} = \frac{z-6}{-6}$ D. $\begin{cases} x = 2 \\ y = -5 + 18t \\ z = 6 + 15t \end{cases}$

Câu 27. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$ và $d_2: \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$. Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là

- A. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-9}{-4}$ B. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-9}{4}$ C. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{4}$ D. $\frac{x-7}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-9}{-4}$

Câu 28. Cho hai đường thẳng $d: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-6}{2} = \frac{z-1}{1}$; $d': \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases}$. Đường thẳng đi qua $A(0; 1; 1)$ cắt d' và

vuông góc d có phương trình là?

- A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$ B. $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$ C. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{4}$ D. $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{4}$

Câu 29. Cho mặt phẳng $(P): 3x - 2y - 3z - 7 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$. Viết phương trình

đường thẳng Δ đi qua $A(-1; 0; 1)$ song song với mặt phẳng (P) và cắt đường thẳng d.

- A. $\frac{x+1}{-15} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{-17}$ B. $\frac{x+1}{-15} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-17}$ C. $\frac{x+1}{15} = \frac{y}{3} = \frac{z-1}{17}$ D. $\frac{x-1}{-15} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-17}$

Câu 30. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}$; $d_2: \begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \\ z=-1+t \end{cases}$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Đường thẳng Δ đi

qua A , vuông góc với d_1 và cắt d_2 có phương trình là

A. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}$ C. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-5}$ **D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$**

Câu 31. Cho $d_1: \begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z}{-3}$; $d_3: \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng Δ ,

biết Δ cắt d_1, d_2, d_3 lần lượt tại A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$ B. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{1}$ C. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ **D. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$**

Câu 32. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3;2;1)$ vuông góc và cắt đường thẳng $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z+3}{1}$ là?

A. $(\Delta): \begin{cases} x=3 \\ y=1-t \\ z=5+4t \end{cases}$ B. $(\Delta): \begin{cases} x=3-t \\ y=2+t \\ z=1-2t \end{cases}$ C. $(\Delta): \begin{cases} x=3 \\ y=1-t \\ z=5-4t \end{cases}$ **D. $(\Delta): \begin{cases} x=3 \\ y=2+t \\ z=1-3t \end{cases}$**

Câu 33. Cho mặt phẳng $(\alpha): 3x - 2y + z + 6 = 0$ và điểm $A(2, -1, 0)$. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (α) là:

A. $(1, -1, 1)$ **B. $(-1, 1, -1)$** C. $(3, -2, 1)$ D. $(5, -3, 1)$

Câu 34. Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu vuông góc của điểm $A(5; -1; -3)$ lên mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 1 = 0$ là điểm nào trong các điểm sau?

A. $(1; 1; 3)$ B. $(1; -1; -3)$ C. $(1; 1; -3)$ **D. $(-1; -1; 3)$**

Câu 35. Cho $A(3;0;0)$, $B(0;-6;0)$, $C(0;0;6)$ và $mp(\alpha): x + y + z - 4 = 0$. Tọa độ hình chiếu vuông góc của trọng tâm tam giác ABC trên $mp(\alpha)$ là

A. $(2; 1; 3)$ **B. $(2; -1; 3)$** C. $(-2; -1; 3)$ D. $(2; -1; -3)$

Câu 36. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;1;0)$ và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 1 = 0$. Khi đó tọa độ điểm M là hình chiếu của điểm A trên (P) là:

A. $M(-1; 1; 1)$ B. $M(1; 1; 1)$ C. $M(1; 1; -1)$ **D. $M(1; -1; 1)$**

Câu 37. Trong các điểm sau, điểm nào là hình chiếu vuông góc của điểm $M(1; -1; 2)$ trên mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 2 = 0$.

A. $(0, 2, 0)$ B. $(-1, 0, 0)$ C. $(0, 0, -1)$ **D. $(1, 0, -2)$**

Câu 38. Cho $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và $A(1; 3; -2)$. Hình chiếu của A trên (P) là $H(a; b; c)$. Giá trị của $a - b + c$ là:

A. $-\frac{3}{2}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ **D. $-\frac{2}{3}$**

Câu 39. Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; 1; 1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=6-4t \\ y=-2-t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Hình chiếu của A trên d

có tọa độ là

A. $(2; -3; -1)$ B. $(2; 3; 1)$ **C. $(2; -3; 1)$** D. $(-2; 3; 1)$

Câu 40. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 0; -1)$ và đường thẳng

$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$. Khi đó tọa độ điểm M là hình chiếu của điểm A trên d là:

A. $M(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$ B. $M(5; -1; -1)$ C. $M(\frac{5}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$ **D. $M(\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{1}{3})$**

Câu 41. Tìm tọa độ điểm H trên đường thẳng d:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$
 sao cho MH ngắn nhất, biết $M(2;1;4)$:

- A. H(2;3;3) B. H(1;3;3) C. H(2;2;3) D. H(2;3;4)

Câu 42. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho A(1;2;1), B(0;1;2). Biết B là hình chiếu của A lên mặt phẳng (α) . Phương trình mặt phẳng (α) là:

- A. $x - y - z + 1 = 0$ B. $x + y + z + 1 = 0$ C. $x + y - z - 1 = 0$ D. $x + y - z + 1 = 0$

Câu 43. Cho hai điểm $M(1;-2;-4)$ và $M'(5;-4;2)$. Biết M' là hình chiếu vuông góc của M lên mp(α). Khi đó, mp(α) có phương trình là

- A. $2x - y + 3z + 20 = 0$ B. $2x + y - 3z - 20 = 0$ C. $2x - y + 3z - 20 = 0$ D. $2x + y - 3z + 20 = 0$

Câu 44. Trong không gian Oxyz mặt phẳng song song với hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{4}$,

$\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$ có một vec tơ pháp tuyến là:

- A. $\vec{n} = (-5;6;-7)$ B. $\vec{n} = (5;-6;7)$ C. $\vec{n} = (-5;-6;7)$ D. $\vec{n} = (-5;6;7)$

Câu 45. Trong không gian Oxyz mp (P) đi qua B(0;-2;3), song song với đường thẳng d: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-3} = z$ và vuông góc với mặt phẳng (Q): $x+y-z=0$ có phương trình ?

- A. $2x-3y+5z-9=0$ B. $2x-3y+5z-9=0$ C. $2x+3y-5z-9=0$ D. $2x+3y+5z-9=0$

Câu 46. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}$. Mặt phẳng cách đều d_1 và d_2 có phương trình

là:

- A. $x + 5y - 2z + 12 = 0$ B. $x + 5y + 2z - 12 = 0$ C. $x - 5y + 2z - 12 = 0$ D. $x + 5y + 2z + 12 = 0$

Câu 47. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x = 9 - 2t \\ y = t \\ z = -2 + t \end{cases}$. Mặt phẳng chứa cả d_1 và d_2 có phương trình

là:

- A. $3x - 5y + z - 25 = 0$ B. $3x - 5y - z + 25 = 0$ C. $3x + 5y + z - 25 = 0$ D. $3x + y + z - 25 = 0$

Câu 48. Cho đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$ và mp(P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$. Mặt phẳng chứa d và vuông góc với mp(P) có phương trình

- A. $2x - 2y + z + 8 = 0$ B. $2x + 2y + z - 8 = 0$ C. $2x - 2y + z - 8 = 0$ D. $2x + 2y - z - 8 = 0$

Câu 49. Cho A(0; 1; 2) và hai đường thẳng d: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$, d': $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$. Viết phương trình mặt phẳng

(P) đi qua A đồng thời song song với d và d'.

- A. $x + 3y + 5z - 13 = 0$ B. $2x + 6y + 10z - 11 = 0$ C. $2x + 3y + 5z - 13 = 0$ D. $x + 3y + 5z + 13 = 0$

Câu 50. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}$ và (P): $x - 2y + 2z - 1 = 0$ mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với (P) có phương trình là :

- A. $2x - 2y + z - 8 = 0$ B. $2x - 2y + z + 8 = 0$ C. $2x + 2y + z - 8 = 0$ D. $2x + 2y - z - 8 = 0$

Câu 51. Phương trình mặt phẳng đi qua M(1; 3; -3) và vuông góc đường thẳng d: $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ là:

- A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+3}{3}$ B. $2x - y + 3z + 10 = 0$
 C. $x + 3y - 3z + 10 = 0$ D. Đáp án A và B đều đúng.

Câu 52. Phương trình của mặt phẳng (P) đi qua $A(1;-1;-1)$ và vuông góc với đường thẳng $d: \begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \\ z=-1+2t \end{cases}$:

- A. $x - y + 2z + 4 = 0$ B. $x - y - 2z - 4 = 0$ C. $x - y - 2z + 4 = 0$ D. $x + y - 2z + 4 = 0$

Câu 53. Góc giữa đường thẳng (d): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+1}{3}$ và mặt phẳng (α): $-x + 2y - 3z = 0$

- A. 90° B. 45° C. 0° D. 180°

Câu 54. Góc giữa đường thẳng (d): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+4}{-3}$ và mặt phẳng (P): $x + y + z - 2 = 0$ là:

- A. 90° B. 45° C. 0° D. 180°

Câu 55. Cho mặt phẳng (P): $x - y - 1 = 0$ và mặt phẳng (Q). Biết hình chiếu của gốc O lên (Q) là điểm $H(2;-1;-2)$. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) có giá trị là:

- A. $\varphi = 30^\circ$ B. $\varphi = 60^\circ$ C. $\varphi = 90^\circ$ D. $\varphi = 45^\circ$

Câu 56. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x+3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-6}{4}$ và $d_2: \frac{x}{1} = \frac{y-19}{-4} = \frac{z}{1}$. Khi đó $\cos \alpha$ bằng:

- A. $\frac{2}{\sqrt{58}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{58}$

Câu 57. Trong hệ tọa độ Oxyz, cho phương trình đường thẳng d: $\frac{x-5}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-4}{\sqrt{2}}$ và phương trình mặt phẳng (α): $x - y + \sqrt{2}z - 7 = 0$. Góc của đường thẳng d và mặt phẳng (α) là:

- A. 45° B. 60° C. 90° D. 30°

Câu 58. Góc giữa hai đường thẳng d: $\frac{x+4}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và d': $\frac{x-5}{-2} = \frac{y+7}{-4} = \frac{z-3}{-2}$ là:

- A. 30° B. 90° C. 45° D. 60°

Câu 59. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng chéo nhau (d): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ và

(d'): $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{-1}$. Tìm khoảng cách giữa (d) và (d'):

- A. $\frac{3}{\sqrt{14}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{14}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{14}}$ D. $\frac{5}{\sqrt{14}}$

Câu 60. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=3+t \\ y=-1+2t \\ z=4 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $(d_2): \begin{cases} x=k \\ y=1+k \\ z=3+2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$.

Khoảng cách giữa (d_1) và (d_2) bằng giá trị nào sau đây?

- A. $\sqrt{\frac{105}{7}}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 2 D. $\frac{5\sqrt{21}}{7}$

Câu 61. Khoảng cách giữa 2 đường thẳng $d_1: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+3}{2}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$ là:

- A. $4\sqrt{2}$ B. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{2}$

Câu 62. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3+4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=3+4t' \\ y=5+6t' \\ z=7+8t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. $d_1 \perp d_2$ B. $d_1 \equiv d_2$ C. $d_1 \parallel d_2$ D. d_1 và d_2 chéo nhau

Câu 63. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=-2-3t \\ z=5+4t \end{cases}$; $d_2: \begin{cases} x=7+3ts \\ y=2+2t \\ z=1-2t \end{cases}$ là:

- A. Chéo nhau B. Trùng nhau C. Song song D. Cắt nhau

Câu 64. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3}$ và $d_2: \begin{cases} x=2t \\ y=1+4t \\ z=2+6t \end{cases}$. Khẳng định

- nào sau đây là đúng?
A. d_1, d_2 cắt nhau **B.** d_1, d_2 trùng nhau **C.** $d_1 // d_2$ **D.** d_1, d_2 chéo nhau

Câu 65. Cho đường thẳng Δ_1 qua điểm M có VTCP \vec{u}_1 , và Δ_2 qua điểm N có VTCP \vec{u}_2 . Điều kiện để Δ_1 và Δ_2 chéo nhau là:

- A.** \vec{u}_1 và \vec{u}_2 cùng phương. **B.** $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} \neq 0$ **C.** $[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = 0$ **D.** $[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ và \vec{MN} cùng phương.

Câu 66. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $d: \begin{cases} x=1-3t \\ y=2t \\ z=-2-mt \end{cases}$ và mp(P): $2x - y - 2z - 6 = 0$. Giá trị của

- m để $d \subset (P)$ là:
A. $m = 2$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = 4$ **D.** $m = -4$

Câu 67. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y + 3z + 1 = 0$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-3+t \\ y=2-2t \\ z=1 \end{cases}$.

- Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. $d \perp (\alpha)$ **B.** d cắt (α) **C.** $d // (\alpha)$ **D.** $d \subset (\alpha)$

Câu 68. Cho hai đường thẳng (d1): $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ và (d2) $\frac{x-3}{4} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-7}{8}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $(d1) \equiv (d2)$ **B.** $(d1) \perp (d2)$ **C.** $(d1) // (d2)$ **D.** (d1) và (d2) chéo nhau

Câu 69. Đường thẳng $\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A.** $6x - 4y - 2z + 1 = 0$ **B.** $6x + 4y - 2z + 1 = 0$ **C.** $6x - 4y + 2z + 1 = 0$ **D.** $6x + 4y + 2z + 1 = 0$

Câu 70. Đường thẳng nào sau đây song song với (d): $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{2} = \frac{z+4}{-3}$

- A.** $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{-3}$ **B.** $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+4}{1}$ **C.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{3}$ **D.** $\frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{3}$

Câu 71. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng

- $(P): x + 3y - 2z - 5 = 0$. Để đường thẳng d vuông góc với (P) thì:
A. $m = 0$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = -2$ **D.** $m = -1$

Câu 72. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng (D): $\frac{x-1}{m} = \frac{y+2}{2m-1} = \frac{z+3}{2}$ và mặt phẳng

- $(P): x + 3y - 2z - 5 = 0$. Định m để $(P) // (D)$.
A. $m = -2$ **B.** $m = 2$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Câu 73. Cho hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+3t \\ z=3+4t \end{cases}$ và $d_2: \begin{cases} x=3+4t' \\ y=5+6t' \\ z=7+8t' \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** $d_1 \equiv d_2$ **B.** $d_1 // d_2$ **C.** d_1 và d_2 chéo nhau **D.** $d_1 \perp d_2$

Câu 74. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 đường thẳng $d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{2}$ và

- $d_2: \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+m}{3}$. Để d_1 cắt d_2 thì m bằng
A. $\frac{3}{4}$ **B.** $\frac{7}{4}$ **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{5}{4}$

Câu 75. Cho hai mặt phẳng (P): $x+y-z+5=0$ và (Q): $2x-z=0$. Nhận xét nào sau đây là đúng

A. Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có giao tuyến là $\frac{x}{1} = \frac{y+5}{1} = \frac{z}{2}$

B. Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) có giao tuyến là $\frac{x}{1} = \frac{y-5}{1} = \frac{z}{2}$

C. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (Q)

D. Mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q)

Câu 76. Vị trí tương đối của hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{1}, \Delta_2: \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{5}$ là:

A. Song song với nhau. **B.** Cắt nhau tại điểm $M(3;2;6)$

C. Chéo nhau. **D.** Cắt nhau tại điểm $M(3;2;-6)$

Câu 77. Cho hai đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và $d: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = 3 - 4t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào

đúng ?

A. Δ và d cắt nhau

B. Δ và d song song

C. Δ và d trùng nhau

D. Δ và d chéo nhau

Câu 78. Cho hai điểm $A(2,0,3)$, $B(2,-2,-3)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$. Nhận xét nào sau đây là

đúng

A. A , B và Δ cùng nằm trong một mặt phẳng

B. A và B cùng thuộc đường thẳng Δ

C. Tam giác MAB cân tại M với $M(2,1,0)$

D. Δ và đường thẳng AB là hai đường thẳng chéo nhau

Câu 79. Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+m}{1}, \Delta_2: \begin{cases} x = 1 + (m+1)t \\ y = 1 + (2-m)t \\ z = 1 + (2m+1)t \end{cases}$. Tìm m để hai đường thẳng trùng

nhau.

A. $m = 3, m = 1$

B. $m = 0$

C. $m = 0, m = -1$

D. $m = 0, m = 2$

Câu 80. Cho đường thẳng $d: \frac{x-8}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-8}{-1}$ và mặt phẳng (P) $x+2y+5z+1=0$. Nhận xét nào sau đây là

đúng

A. Đường thẳng d song song với mặt phẳng (P)

B. Đường thẳng d thuộc mặt phẳng (P)

C. Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P) tại $A(8,5,8)$

D. Đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P)

Câu 81. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): x + 3y + z + 1 = 0$. Trong các khẳng định sau, tìm

khẳng định đúng :

A. $d // (\alpha)$

B. $d \subset (\alpha)$

C. $d \perp (\alpha)$

D. (α) cắt d

Câu 82. Cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}, d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}$. Hai đường thẳng đó:

A. Chéo nhau

B. Trùng nhau

C. Cắt nhau

D. Song song

Câu 83. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 3x + 2y + z - 12 = 0$ và đường thẳng

$(\Delta): \begin{cases} x = t \\ y = 6 - 3t \\ z = 3t \end{cases}$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng.

A. $(\Delta) \subset (\alpha)$

B. (Δ) cắt (α)

C. $(\Delta) \perp (\alpha)$

D. $(\Delta) // (\alpha)$

Dạng toán 4. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU VÀ BÀI TOÁN LIÊN QUAN

A – PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

— Để viết phương trình mặt cầu (S), ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R .

$$(S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm : } I(a;b;c) \\ \bullet \text{ Bán kính : } R \end{cases} \Rightarrow \boxed{(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$$

— Phương trình $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ với $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ là phương trình mặt cầu tâm $I(a;b;c)$, bán kính: $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$.

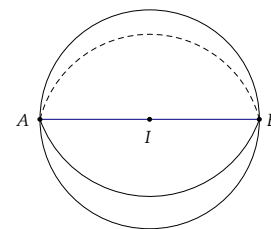
B – CÁC DẠNG BÀI TOÁN PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

BT 1. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và đi qua điểm A, với:

$$\xrightarrow{P^2} \text{Mặt cầu } (S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm : } I(a;b;c) \\ \bullet \text{ Bán kính : } R = IA \end{cases} \Rightarrow \boxed{(S) : (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2}.$$

BT 2. Viết phương trình mặt cầu (S) có đường kính AB, với:

$$\xrightarrow{P^2} \text{Mặt cầu } (S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm : } I \text{ là trung điểm } AB \\ \bullet \text{ Bán kính : } R = IA = \frac{AB}{2} \end{cases}$$



BT 3. Viết phương trình mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD, với:

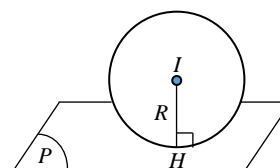
- Gọi mặt cầu có dạng $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*)
- Thay lần lượt tọa độ của các điểm A, B, C, D vào (*) ta được 4 phương trình.
- Giải hệ đó ta tìm được a, b, c, d. Thay vào (*), suy ra mặt cầu (S).

BT 4. Viết phương trình mặt cầu (S) đi qua ba điểm A, B, C và tâm nằm trên mặt phẳng (P), với:

- Gọi mặt cầu có dạng $(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (*)
- Thay lần lượt tọa độ của các điểm A, B, C vào (*) ta được 3 phương trình. Kết hợp việc thay tọa độ tâm $I(a,b,c)$ vào phương trình mặt phẳng (P), ta được phương trình thứ tư.
- Giải hệ đó ta tìm được a, b, c, d. Thay vào (*), suy ra mặt cầu (S)..

BT 5. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt phẳng (P) cho trước:

$$\xrightarrow{P^2} \text{Mặt cầu } (S) : \begin{cases} \bullet \text{ Tâm : } I(a;b;c) \\ \bullet \text{ Bán kính : } R = d(I,(P)) = IH \end{cases}$$



BT 6. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với đường thẳng Δ

- Tìm tọa độ hình chiếu H của I trên đường thẳng Δ.
- Phương trình mặt cầu có tâm là I, bán kính $R = IH$.

BT 7. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và tiếp xúc với mặt cầu (T) cho trước, với:

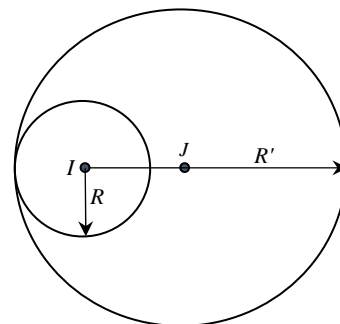
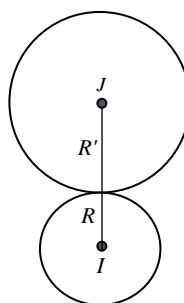
- Xác định tâm J và bán kính R' của mặt cầu (T).
- Áp dụng điều kiện tiếp xúc để tìm bán kính R của mặt cầu (S).

Tiếp xúc ngoài: $R + R' = IJ$.

Tiếp xúc trong $|R - R'| = IJ$.

a)
$$\begin{cases} I(-5;1;1) \\ (T) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 5 = 0 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} I(-3;2;2) \\ (T) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 8z + 5 = 0 \end{cases}$$



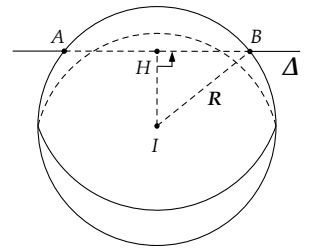
BT 8. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt đường thẳng Δ theo dây cung $AB = k$ cho trước trong các trường hợp sau:

Cần tìm bán kính của mặt cầu $R = IB$?

• Tính $d(I, \Delta) = IH$.

• Theo pitago, có bán kính: $R = IB = \sqrt{IH^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$.

Lưu ý: Thay vì cho độ dài dây cung, đề bài có thể cho tam giác. Khi đó ta cần dùng hệ thức lượng để tìm ra



giác vuông, cân, đều hoặc diện $R = IB$.

BT 9. Viết phương trình mặt cầu tâm I, cắt (P) theo một đường tròn (C), có bán kính r.

• Tính khoảng cách $d(I, (P)) = IH$.

• Tính bán kính mặt cầu $R = \sqrt{IH^2 + r^2}$.

C- BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ có tâm I và bán kính R là:

A. $I(1; -2; 0), R = \sqrt{6}$ B. $I(1; -2; 1), R = \sqrt{6}$ C. $I(1; -2; 1), R = 2$ D. $I(1; -2; 0), R = 2$

Câu 2. Trong không gian Oxyz, cho mặt cầu (S): $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x - 8y + 2 = 0$. Tọa độ tâm I và bán kính R của mặt cầu là:

A. $I(-1; 2; 0); R = 4$ B. $I(1; -2; 0); R = 2$ C. $I(-1; 2; 0); R = 2$ D. $I(1; 2; 0); R = 4$

Câu 3. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 4z = 0$. Biết OA, (O là gốc tọa độ) là đường kính của mặt cầu (S). Tìm tọa độ điểm A?

A. $A(-1; 3; 2)$ B. $A(2; -6; -4)$ C. $A(-2; 6; 4)$ D. Không xác định

Câu 4. Trong không gian Oxyz, để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx + 2(m-2)y - 2(m+3)z + 8m + 37 = 0$ là phương trình của mặt cầu. Khi đó giá trị của tham số m bằng bao nhiêu?

A. $m < -2$ hay $m > 4$ B. $m < -4$ hay $m > 2$ C. $m < -4$ hay $m > -2$ D. $m \leq -2$ hay $m \geq 4$.

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, giả sử mặt cầu $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx + 4y + 2mz + m^2 + 4m = 0$ có bán kính nhỏ nhất. Khi đó giá trị của m là:

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 0

Câu 6. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $M(1; -1; 3)$ và mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 = 19$. Tìm khẳng định đúng?

A. M nằm trong (S) B. M nằm trong (S) C. M nằm trên (S) D. M trùng với tâm của (S)

Câu 7. Cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z = 0$. Trong ba điểm $(0; 0; 0)$; $(1; 2; 3)$ và $(2; -1; -1)$ thì có bao nhiêu điểm nằm trong mặt cầu (S)

A. 1 B. 3 C. 2 D. 0

Câu 8. Phương trình mặt cầu tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R=3$ là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$ B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3$ D. A và B đều đúng.

Câu 9. Phương trình mặt cầu đi qua 4 điểm $A(3, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, -2)$ và $O(0, 0, 0)$ là:

A. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y + 4z = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 4y + 2z = 0$

C. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 4z = 0$ D. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 4y - 2z = 0$

Câu 10. Tọa độ tâm mặt cầu đi qua 4 điểm $A(1;1;1); B(1;2;1); C(3;3;3); D(3;-3;3)$ là :

- A. $(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ B. $(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$ C. $(3;3;3)$ D. $(3;-3;3)$

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho các điểm $A(1;0;0); B(0;1;0); C(0;0;1); D(1;1;1)$. Bán kính mặt cầu đi qua bốn điểm ABCD là :

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 12. Cho $A(2;0;0), B(0;2;0), C(0;0;2), D(2;2;2)$. Mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD có bán kính

- A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Câu 13. Cho mặt cầu (S) có tâm $I(4;2;-2)$, bán kính R. Biết (S) tiếp xúc (P): $12x - 5z - 19 = 0$. Bán kính R là?

- A. $R = 39$ B. $R = 13$ C. $R = 3$ D. $R = 3\sqrt{13}$

Câu 14. Mặt cầu (S) tâm $I(1;2;2)$ và tiếp xúc với (P): $x + 2y + 2z - 5 = 0$ có bán kính là :

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 3

Câu 15. Cho (S) là mặt cầu tâm $I(1;2;3)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (P): $x - 2y + 2z + 3 = 0$. Bán kính của (S) là:

- A. 2 B. 6 C. 1 D. $\frac{2}{3}$

Câu 16. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $x + y + z + 1 = 0$. Viết phương trình mặt cầu có tâm $I(1;1;0)$ và tiếp xúc với mp(P).

- A. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$ B. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \sqrt{3}$
 C. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \sqrt{3}$ D. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$

Câu 17. Mặt cầu tâm $I(1;-2;3)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P): $2x - y + 2z - 1 = 0$ có phương trình :

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3$ B. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 9$
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 3$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$

Câu 18. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm $A(1;-2;3)$ và đường thẳng d có phương trình $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+3}{-1}$. Viết phương trình mặt cầu tâm A, tiếp xúc với d.

- A. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 5$ B. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 50$
 C. $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 50$ D. $(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = \sqrt{50}$

Câu 19. Cho mặt phẳng (P): $16x - 15y - 12z + 75 = 0$ và mặt cầu (S) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. (P) tiếp xúc với (S) tại điểm:

- A. $(-\frac{48}{25}; 11; \frac{36}{25})$ B. $(-1; 1; \frac{19}{3})$ C. $(-1; 1; \frac{36}{25})$ D. $(-\frac{48}{25}; \frac{9}{5}; \frac{36}{25})$

Câu 20. Trong không gian Oxyz cho mặt phẳng (P): $2x + 3y + z - 11 = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với (P) tại H. Tọa độ tiếp điểm H là.

- A. $H(3;1;2)$ B. $H(5;4;3)$ C. $H(1;2;3)$ D. $H(2;3;-1)$

Câu 21. Trong không gian Oxyz cho mặt cầu (S): $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 22 = 0$, và mặt phẳng (P): $3x - 2y + 6z + 14 = 0$. Khoảng cách từ tâm I của mặt cầu (S) đến mặt phẳng (P) là

- A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

Chủ đề 7: NGUYÊN HÀM - TÍCH PHÂN - ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN
I, Nguyên hàm

A- Tóm tắt lý thuyết

1. Khái niệm nguyên hàm và tính chất

1. Khái niệm nguyên hàm

- Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K . Hàm số $F(x)$ được gọi là **nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K nếu: $F'(x) = f(x), \forall x \in K$.
- Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên K thì **ho. nguyên hàm** của hàm số $f(x)$ trên K là:
 $\int f(x) \cdot dx = F(x) + C, \text{ const} = C \in \mathbb{R}$.

2. Tính chất: Nếu $f(x), g(x)$ là 2 hàm số liên tục trên K và $k \neq 0$ thì ta luôn có:

- $\int f'(x)dx = f(x) + C.$ • $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx.$
- $\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

Bảng nguyên hàm của một số hàm thường gặp (với C là hằng số tùy y)

① $\int x^\alpha \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax + b)^n \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax + b)^{n+1}}{n+1} + C$
② $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{ax + b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \ln ax + b + C$
③ $\int \frac{1}{x^2} \cdot dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{(ax + b)^2} \cdot dx = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{ax + b} + C$
④ $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin(ax + b)dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
⑤ $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos(ax + b) \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \sin(ax + b) + C$
⑥ $\int \frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax + b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax + b) + C$
⑦ $\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax + b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax + b) + C$
⑧ $\int e^x \cdot dx = e^x + C$	$\int e^{ax+b} \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + C$
⑨ $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{x - a}{x + a} \right + C$

♦ **Nhận xét.** Khi thay x bằng $(ax + b)$ thì lấy nguyên hàm nhân kết quả thêm $\frac{1}{a}$.

Một số lưu ý

1. Cần nắm vững bảng nguyên hàm.
2. Nguyên hàm của một tích (thương) của nhiều hàm số **không bao giờ** bằng tích (thương) của các nguyên hàm của những hàm thành phần.
3. Muốn tìm nguyên hàm của một hàm số, ta phải **biến đổi** hàm số này **thành một tổng hoặc hiệu** của những hàm số tìm được nguyên hàm (dựa vào bảng nguyên hàm).

2. Các phương pháp tìm nguyên hàm của hàm số

Dạng toán 1. TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG BẢNG NGUYÊN HÀM

Phương Pháp

1. Tích của đa thức hoặc lũy thừa \xrightarrow{PP} khai triển.
2. Tích các hàm mũ \xrightarrow{PP} khai triển theo công thức mũ.
3. Chứa căn \xrightarrow{PP} chuyển về lũy thừa.
4. Tích lượng giác bậc một của sin và cosin \xrightarrow{PP} khai triển theo công thức tích thành tổng.
5. Bậc chẵn của sin và cosin \xrightarrow{PP} Hạ bậc.

Dạng toán 2. TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Định lý: Cho $\int f(u)du = F(u) + C$ và $u = u(x)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thì

$$\int f[u(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] + C.$$

1. Đổi biến số dạng 1: đặt $t = \varphi(x)$.

- $I = \int f(ax + b)^n \cdot x dx \xrightarrow{PP} t = ax + b \Rightarrow dt = a \cdot dx$
- $I = \int \left(\frac{x^n}{ax^{n+1} + 1} \right)^m \cdot dx \xrightarrow{PP} t = x^{n+1} + 1 \Rightarrow dt = (n + 1)x^n \cdot dx$, với $m, n \in \mathbb{Z}$.
- $I = \int f(ax^2 + b)^n \cdot x dx \xrightarrow{PP} t = ax^2 + b \Rightarrow dt = 2ax \cdot dx$
- $I = \int \sqrt[n]{f(x)} \cdot f'(x) \cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \sqrt[n]{f(x)}$, trừ một số trường hợp đổi biến dạng 2.
- $\begin{cases} I = \int f(\ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \\ I = \int f(a + b \ln x) \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \end{cases} \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \ln x \\ t = a + b \ln x \end{cases}$.
- $I = \int f(e^x) \cdot e^x \cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = e^x$.
- $I = \int f(\cos x) \cdot \sin x dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \cos x \Rightarrow dt = -\sin x dx$.
- $I = \int f(\sin x) \cdot \cos x dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \sin x \Rightarrow dt = \cos x dx$.
- $I = \int f(\tan x) \cdot \frac{1}{\cos^2 x} dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$.
- $I = \int f(\cot x) \cdot \frac{1}{\sin^2 x} dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \cot x \Rightarrow dt = -\frac{1}{\sin^2 x} \cdot dx = -(1 + \cot^2 x) dx$.
- $I = \int f(\sin^2 x; \cos^2 x) \cdot \sin 2x dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $\begin{cases} t = \sin^2 x \Rightarrow dt = \sin 2x dx \\ t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -\sin 2x dx \end{cases}$.
- $I = \int f(\sin x \pm \cos x) \cdot (\sin x \mp \cos x) \cdot dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $t = \sin x \pm \cos x$.

2. Đổi biến số dạng 2: đặt $x = \varphi(t)$.

- $I = \int f(\sqrt{a^2 - x^2}) \cdot x^{2n} dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $x = a \cdot \sin t \Rightarrow dx = a \cdot \cos t \cdot dt$.
- $I = \int f(\sqrt{x^2 + a^2}) \cdot x^{2n} dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $x = a \cdot \tan t \Rightarrow dx = \frac{a dt}{\cos^2 t}$.
- $I = \int f(\sqrt{x^2 - a^2}) \cdot x^{2n} dx \xrightarrow{PP}$ Đặt $x = \frac{a}{\cos t} \Rightarrow dx = \frac{a \sin t}{\cos^2 t} \cdot dt$.

- $I = \int \frac{dx}{(x-a)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } x-a = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -\frac{dt}{t^2}$.
- $I = \int R[\sqrt[n_1]{ax+b}, \dots, \sqrt[n_k]{ax+b}] \cdot dx \xrightarrow{PP} \text{Đặt } t^n = ax+b \text{ với } n = B.C.N.N \{n_1; n_2; \dots; n_k\}$.
- $I = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)}} \xrightarrow{PP} \text{Đặt } \begin{cases} t = \sqrt{x+a} + \sqrt{x+b} \text{ khi } \begin{cases} x+a > 0 \\ x+b > 0 \end{cases} \\ t = \sqrt{-x-a} + \sqrt{-x-b} \text{ khi } \begin{cases} x+a < 0 \\ x+b < 0 \end{cases} \end{cases}$.

Dạng toán 3. TÍNH NGUYÊN HÀM BẰNG PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Phương Pháp

Định lý: Nếu hai hàm số $u = u(x)$ và $v = v(x)$ có đạo hàm và liên tục trên K thì

$$I = \int u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) \cdot dx \text{ hay } I = \boxed{\int u dv = uv - \int v du}.$$

Vấn dụng giải toán:

- **Nhận dạng:** Tích 2 hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác $\int e^x \cdot \sin x \cdot dx, \dots$
- **Đặt:** $\begin{cases} u = \dots \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots dx \\ dv = \dots dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots \end{cases}$. Suy ra: $I = \int u dv = uv - \int v du$.
- **Thứ tự ưu tiên chọn u:** **log - đa - lượng - mũ** và $dv = \text{phần còn lại}$. Nghĩa là nếu có \ln hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln$ hay $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ và $dv = \text{còn lại}$. Nếu không có \ln ; \log thì chọn $u = \text{đa thức}$ và $dv = \text{còn lại}$. Nếu không có \log , đa thức, ta chọn $u = \text{lượng giác}, \dots$
- **Lưu ý** rằng bậc của đa thức và bậc của \ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.

Dạng mũ nhân lượng giác là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

Dạng toán 4. TÍNH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ HỮU TỶ

Bài toán tổng quát: Tính nguyên hàm $I = \int \frac{P(x)}{Q(x)} \cdot dx$, với $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức không căn.

Phương pháp giải:

- Nếu bậc của tử số $P(x) \geq$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP} \text{Chia đa thức}$.
- Nếu bậc của tử số $P(x) <$ bậc của mẫu số $Q(x) \xrightarrow{PP} \text{Xem xét mẫu số và khi đó:}$
 - + Nếu mẫu số phân tích được thành tích số, ta sẽ sử dụng đồng nhất thức để đưa về dạng tổng của các phân số.

Một số trường hợp đồng nhất thức thường gặp:

- $\frac{1}{(ax+m) \cdot (bx+n)} = \frac{1}{an-bm} \cdot \left(\frac{a}{ax+m} - \frac{b}{bx+n} \right)$.

- $\frac{mx + n}{(x - a) \cdot (x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b} = \frac{(A + B) \cdot x - (Ab + Ba)}{(x - a) \cdot (x - b)} \Rightarrow \begin{cases} A + B = m \\ Ab + Ba = -n \end{cases}$
- $\frac{1}{(x - m) \cdot (ax^2 + bx + c)} = \frac{A}{x - m} + \frac{Bx + C}{ax^2 + bx + c}$, với $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.
- $\frac{1}{(x - a)^2 \cdot (x - b)^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2} + \frac{C}{x - b} + \frac{D}{(x - b)^2}$.

+ Nếu mẫu số không phân tích được thành tích số (biến đổi và đưa về dạng lượng giác).

B- Bài tập trắc nghiệm

DẠNG 1: DÙNG BẢNG NGUYÊN HÀM CƠ BẢN

NHÓM 1 : DÙNG BẢNG NGUYÊN HÀM

Câu 1. Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{2}{5 - 2x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}$ là hàm số nào?

- A.** $F(x) = -\ln|5 - 2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$. **B.** $F(x) = -\ln|5 - 2x| + 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$.
- C.** $F(x) = \ln|5 - 2x| + 2\ln|x| - \frac{3}{x} + C$. **D.** $F(x) = -\ln|5 - 2x| - 2\ln|x| + \frac{3}{x} + C$.

Câu 2. Cho $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1) = 0$ là:

- A.** $-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + \frac{1}{4}$ **B.** $-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 - \frac{1}{4}$
- C.** $-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 - 1$ **D.** $-\frac{x^4}{4} + x^3 - x^2 + 1$

Câu 3. Kết quả của $\int x(x^2 + 1)^2 dx$ bằng:

- A.** $F(x) = \frac{(x^2 + 1)^3}{3} + C$ **B.** $F(x) = \frac{(x^2 + 1)^3}{6} + C$
- C.** $F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\frac{x^3}{3} + x \right) + C$ **D.** $F(x) = \frac{x^2}{6} (x^2 + 1)^3 + C$

Câu 4. Tìm họ nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 3x^2 - 3^x$, ta được kết quả là:

- A.** $F(x) = x^3 - \frac{3^x}{\ln 3} + C$ **B.** $F(x) = x^3 + \frac{3^x}{\ln 3} + C$
- C.** $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3^x}{\ln 3} + C$ **D.** $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Câu 5. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = (1 - 2x)^5$ là:

- A.** $-\frac{1}{12}(1 - 2x)^6 + C$ **B.** $(1 - 2x)^6 + C$ **C.** $5(1 - 2x)^6 + C$ **D.** $5(1 - 2x)^4 + C$

Câu 6. Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng $f'(x) = 2x + 1$ và $f(1) = 5$

- A.** $x^2 + x + 3$ **B.** $x^2 + x - 3$ **C.** $x^2 + x$ **D.** Kết quả khác

Câu 7. Tìm hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = (x^2 - x)(x + 1)$ và $f(0) = 3$

- A.** $y = f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + 3$ **B.** $y = f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 3$

C. $y = f(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + 3$

D. $y = f(x) = 3x^2 - 1$

NHÓM 2: HÀM SỐ VÔ TỶ (CHỨA CĂN)

Câu 8. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ là

A. $\int f(x) dx = \sqrt{2x-1} + C.$

B. $\int f(x) dx = 2\sqrt{2x-1} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{\sqrt{2x-1}}{2} + C.$

D. $\int f(x) dx = -2\sqrt{2x-1} + C.$

Câu 9. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}$.

A. $\int f(x) dx = -2\sqrt{3-x} + C.$

B. $\int f(x) dx = -\sqrt{3-x} + C.$

C. $\int f(x) dx = 2\sqrt{3-x} + C.$

D. $\int f(x) dx = -3\sqrt{3-x} + C.$

Câu 10. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2x+1}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

B. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(2x+1)\sqrt{2x+1} + C.$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} + C.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} + C.$

Câu 11. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$.

A. $\int f(x) dx = \frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$

B. $\int f(x) dx = -\frac{3}{4}(x-2)\sqrt[3]{x-2} + C.$

C. $\int f(x) dx = \frac{2}{3}(x-2)\sqrt{x-2}.$

D. $\int f(x) dx = \frac{1}{3}(x-2)^{\frac{2}{3}} + C.$

Câu 12. Hàm số $F(x) = (x+1)^2\sqrt{x+1} + 2016$ là một nguyên hàm của hàm số nào sau đây?

A. $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1}$

B. $f(x) = \frac{5}{2}(x+1)\sqrt{x+1} + C$

C. $f(x) = \frac{2}{5}(x+1)\sqrt{x+1}$

D. $f(x) = (x+1)\sqrt{x+1} + C$

Câu 13. Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-3x}} + 1$ là hàm số $F(x)$ thỏa mãn $F(-1) = \frac{2}{3}$.

Khi đó $F(x)$ là hàm số nào sau đây?

A. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 3$

B. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} - 3$

C. $F(x) = x - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x} + 1$

D. $F(x) = 4 - \frac{2}{3}\sqrt{1-3x}$

Câu 14. Biết $F(x) = 6\sqrt{1-x}$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{a}{\sqrt{1-x}}$. Khi đó giá trị của a bằng

A. $-3.$

B. $3.$

C. $6.$

D. $\frac{1}{6}.$

Câu 15. Tính $\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2} \right) dx$

A. $\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{x}{2} + C$ B. $2\sqrt{x} - \frac{x}{2} + C$ C. $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x + C$ D. $\frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{x}{2} + C$

NHÓM 3: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 16. Cho hàm số $f(x) = 2x + \sin x + 2 \cos x$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0) = 1$ là:

A. $x^2 - \cos x + 2 \sin x + 2$ B. $x^2 + \cos x + 2 \sin x + 2$
 C. $2 + \cos x + 2 \sin x$ D. $x^2 + \cos x + 2 \sin x - 2$

Câu 17. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \tan^2 x$ là:

A. $\frac{\tan^3 x}{3}$ B. $\frac{\tan^3 x}{3} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$ C. $\tan x - x$ D. $\frac{2 \sin x}{\cos^3 x}$

Câu 18. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos^4 x - \sin^4 x$ là:

A. $\cos 2x$ B. $\frac{1}{2} \sin 2x$ C. $2 \sin 2x$ D. $\cos^2 x$

Câu 19. Biết $F(x) = \int (1 + \tan^2 x) dx$ khi đó $F(x)$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + C$ B. $F(x) = \tan x + C$
 C. $F(x) = -\tan x + C$ D. $F(x) = \cot x + C$

Câu 20. Gọi $F_1(x)$ là nguyên của hàm số $f_1(x) = \sin^2 x$ thỏa mãn $F_1(0) = 0$ và $F_2(x)$ là nguyên của hàm số $f_2(x) = \cos^2 x$ thỏa mãn $F_2(0) = 0$. Khi đó phương trình $F_1(x) = F_2(x)$ có nghiệm là:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$ B. $x = \frac{\pi}{2}k, k \in Z$ C. $x = k\pi, k \in Z$ D. $x = k2\pi, k \in Z$

Câu 21. Nguyên hàm của hàm số: $y = \cos^2 x \cdot \sin x$ là:

A. $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$ B. $-\cos^3 x + C$ C. $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$ D. Đáp án khác.

Câu 22. Một nguyên hàm của hàm số: $y = \cos 5x \cdot \cos x$ là:

A. $F(x) = \cos 6x$ B. $F(x) = \sin 6x$
 C. $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} \sin 6x + \frac{1}{4} \sin 4x \right)$ D. $-\frac{1}{2} \left(\frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 4x}{4} \right)$

Câu 23. Tìm $\int (\sin x + 1)^3 \cos x dx$ là:

A. $\frac{(\cos x + 1)^4}{4} + C$ B. $\frac{\sin^4 x}{4} + C$ C. $\frac{(\sin x + 1)^4}{4} + C$ D. $4(\sin x + 1)^3 + C$

Câu 24. Nguyên hàm của hàm số $y = \sin^3 x \cdot \cos x$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{4} \sin^4 x + C$ B. $F(x) = -\frac{1}{4} \sin^4 x + C$
 C. $F(x) = \frac{1}{4} \cos^4 x + C$ D. $F(x) = -\frac{1}{4} \cos^4 x + C$

Câu 25. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$ là:

A. $F(x) = -\cos x - \sin x + C$ B. $F(x) = \cos x + \sin x + C$
 C. $F(x) = \cot x - \tan x + C$ D. $F(x) = -\cot x - \tan x + C$

Câu 26. Tìm nguyên hàm $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx =$

- A. $2 \tan 2x + C$ **B.** $2 \cot 2x + C$ C. $4 \cot 2x + C$ D. $2 \cot 2x + C$

NHÓM 4: HÀM SỐ MŨ, LOGARIT

Câu 27. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x - e^{-x}$.

- A.** $\int f(x) dx = e^x + e^{-x} + C$. B. $\int f(x) dx = -e^x + e^{-x} + C$.
 C. $\int f(x) dx = e^x - e^{-x} + C$. D. $\int f(x) dx = -e^x - e^{-x} + C$.

Câu 28. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x \cdot 3^{-2x}$.

- A.** $\int f(x) dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$. B. $\int f(x) dx = \left(\frac{9}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$.
 C. $\int f(x) dx = \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 - \ln 9} + C$. D. $\int f(x) dx = \left(\frac{2}{9}\right)^x \cdot \frac{1}{\ln 2 + \ln 9} + C$.

Câu 29. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(3 + e^{-x})$ là

- A.** $F(x) = 3e^x + x + C$. B. $F(x) = 3e^x + e^x \ln e^x + C$.
 C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{e^x} + C$. D. $F(x) = 3e^x - x + C$.

Câu 30. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{e^{4x-2}}$.

- A.** $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{2x-1} + C$. B. $\int f(x) dx = e^{2x-1} + C$.
 C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} e^{4x-2} + C$. D. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} \sqrt{e^{2x-1}} + C$.

Câu 31. Tính $\int (3 \cos x - 3^x) dx$, kết quả là:

- A.** $3 \sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$ B. $-3 \sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ C. $3 \sin x + \frac{3^x}{\ln 3} + C$ D. $-3 \sin x - \frac{3^x}{\ln 3} + C$

Câu 32. Hàm số $F(x) = e^x + \tan x + C$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nào?

- A. $f(x) = e^x - \frac{1}{\sin^2 x}$ B. $f(x) = e^x + \frac{1}{\sin^2 x}$ **C.** $f(x) = e^x + \frac{1}{\cos^2 x}$ D. Kết quả khác

Câu 33. Nếu $\int f(x) dx = e^x + \sin 2x + C$ thì $f(x)$ bằng

- A. $e^x + \cos 2x$ B. $e^x - \cos 2x$ C. $e^x + 2 \cos 2x$ **D.** $e^x + \frac{1}{2} \cos 2x$

Câu 34. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2^x - 4^x$.

- A. $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{(2^x)^2}{\ln 2} + C$ B. $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} (1 - 2^{x-1}) + C$
 C. $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} \left(1 - \frac{4^x}{\ln 2}\right) + C$ **D.** $F(x) = \frac{2^x}{2 \ln 2} (1 - 2^x) + C$.

Câu 35. Tìm $\int e^x \left(3 - \frac{2}{x^5 e^x}\right)$.

- A.** $F(x) = 3e^x + \frac{1}{2x^4} + C$ B. $F(x) = -3e^x - \frac{1}{2x^4} + C$

C. $F(x) = 3e^x - \frac{1}{2x^4} + C$

D. $F(x) = -3e^x + \frac{1}{2x^4} + C$

NHÓM 5: HÀM PHÂN THỨC

Câu 36. Một nguyên hàm của hàm số $y = \frac{3x + 5}{x + 2}$ là:

A. $F(x) = 3x + 4 \ln|x + 2| + C$

B. $F(x) = -3x + \ln|x + 2| + C$

C. $F(x) = 3x - \ln|x + 2| + C$

D. $F(x) = 3x + \ln|x + 2| + C$

Câu 37. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{x + 1}$ là:

A. $\ln|x + 1|$

B. $x + \ln|x + 1|$

C. $x - \ln|x + 1|$

D. $2 \ln|x + 1|$

Câu 38. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1) = 0$ là:

A. $x + \frac{2}{x + 1} - 2$

B. $x + \frac{2}{x + 1} + 2$

C. $x - 2 \ln(x + 1)^2$

D. $x - \frac{2}{x + 1} + 2$

Câu 39. Hàm số nào sau đây không là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(2 + x)}{(x + 1)^2}$?

A. $\frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

B. $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

C. $\frac{x^2}{x + 1}$

D. $\frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$

Câu 40. Cho hàm số $f(x) = \frac{(x^2 + 1)^2}{x^3}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(1) = -4$ là :

A. $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + 4$

B. $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{1}{2x^2} - 4$

C. $\frac{x^2}{2} + 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} - 4$

D. $F(x) = x^3 - 2x + C$

Câu 41. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 1}$ là:

A. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + 2 \ln|x + 1| + C$

B. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 2 \ln|x + 1| + C$

C. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x + 1| + C$

D. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - x - 2 \ln|x + 1| + C$

Câu 42. Gọi hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 2x + 1}$, biết $F(1) = \frac{1}{3}$. Vậy $F(x)$ là:

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x + 1} - \frac{13}{6}$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x + 1} + \frac{13}{6}$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{x + 1} + C$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{2}{x + 1}$

Câu 43. Tìm một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}$ biết $F(1) = \frac{1}{2}$. Kết quả là:

A. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x + 2$

B. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x - 2$

C. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x + \frac{1}{2}$

D. $F(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + \ln x - \frac{1}{2}$

Câu 44. Ta có: $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 3 \\ B = 2. \\ C = 1 \end{cases}$

Tính $\int f(x)dx = F(x) + C$, ta được kết quả là:

A. $F(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+2} + C$

B. $F(x) = -\frac{3}{x-1} + 2\ln|x-1| + \ln|x-2| + C$

C. $F(x) = 3\ln|x-1| - \frac{2}{x-1} + \ln|x-2| + C$

D. $F(x) = -3\ln|x-1| + 2\ln|x+2| - \frac{1}{x-1} + C$

Câu 45. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ là :

A. $\ln x - \ln x^2 + C$

B. $\ln x - \frac{1}{x} + C$

C. $\ln x + \frac{1}{x} + C$

D. Kết quả khác

Câu 46. Tính nguyên hàm $\int \frac{1}{2x+1} dx$ ta được kết quả sau:

A. $\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$

B. $-\ln|2x+1| + C$

C. $-\frac{1}{2} \ln|2x+1| + C$

D. $\ln|2x+1| + C$

Câu 47. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$ là :

A. $\frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x} + C$

B. $\frac{2x^3}{3} - \frac{3}{x^2} + C$

C. $\frac{2x^3}{3} - 3\ln x^2 + C$

D. Kết quả khác

Câu 48. Kết quả của $\int \frac{x}{1-x^2} dx$ là:

A. $\sqrt{1-x^2} + C$

B. $\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

C. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C$

D. $-\sqrt{1-x^2} + C$

Câu 49. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{1}{2x+5}$ là

A. $F(x) = \frac{1}{2} \ln|2x+5| + 2016$

B. $F(x) = \ln|2x+5|$

C. $F(x) = -\frac{2}{(2x+5)^2}$

D. $F(x) = -\frac{1}{(2x+5)^2}$

Câu 40. Nguyên hàm của hàm số $y = f(x) = \frac{1}{(1+2x)^2}$ là:

A. $F(x) = \frac{-1}{2} \cdot \frac{1}{1+2x} + C$

B. $F(x) = \ln|(1+2x)^2| + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+2x} + C$

D. $F(x) = \frac{-1}{1+2x} + C$

DẠNG 2: PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN

Câu 1. Tính $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} dx$

A. $\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+5}} + C$

B. $2\sqrt{x^2-2x+5} + C$

C. $\frac{\sqrt{x^2-2x+5}}{2} + C$

D. $\sqrt{x^2-2x+5} + C$

Câu 2. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ là

A. $F(x) = \ln \sqrt{x^2+1} + C$

B. $F(x) = \sqrt{x^2+1} + C$

C. $F(x) = 2\sqrt{x^2+1} + C$

D. $F(x) = \frac{2}{3(x^2+1)} + C$

Câu 3. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$ là

A. $F(x) = e^{\sin x}$

B. $F(x) = e^{\cos x}$

C. $F(x) = e^{-\sin x}$

D. $F(x) = \sin x \cdot e^{\sin x}$

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x(x^2+1)^{2016}$. Khi đó :

A. $\int f(x) dx = \frac{(x^2+1)^{2017}}{4034} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{(x^2+1)^{2016}}{4032}$

C. $\int f(x) dx = \frac{(x^2+1)^{2016}}{2016}$

D. $\int f(x) dx = \frac{(x^2+1)^{2017}}{2017}$

Câu 5. Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số

A. $f(x) = 2xe^{x^2}$

B. $f(x) = e^{2x}$

C. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$

D. $f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$

Câu 6. Kết quả của $\int \cos x \sqrt{\sin x + 1} dx$ bằng:

A. $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{(\sin x + 1)^3} + C$

B. $F(x) = -\frac{2}{3} \sqrt{(\sin x + 1)^3} + C$

C. $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{\sin x + 1} + C$

D. $F(x) = \frac{2}{3} (\sin x + 1)^3 + C$

Câu 7. Kết quả của $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}} dx$ bằng:

A. $F(x) = \sqrt{e^x+3} + C$

B. $F(x) = 2\sqrt{e^x+3} + C$

C. $F(x) = e^x + 3 + C$

D. $F(x) = \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3x}} + C$

Câu 8. Hàm số $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ có các nguyên hàm là:

A. $F(x) = \ln^2 x + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2} \ln x + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$

D. $F(x) = \frac{1}{x \cdot x^2} + C$

Câu 9. Hàm số $f(x) = \ln x \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{\ln x} \right)$ có các nguyên hàm là:

A. $F(x) = \ln^2 x + x^2 + C$

B. $F(x) = \frac{\ln^2 x + x^2}{2} + C$

C. $F(x) = \frac{\ln^2 x}{2} + x^2 + C$

D. $F(x) = \ln x \left(\ln x + \frac{x^2}{2 \ln x} \right) + C$

Câu 10. Gọi $F(x)$ là nguyên của hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{8-x^2}}$ thỏa mãn $F(2) = 0$. Khi đó phương trình $F(x) = x$ có nghiệm là:

A. $x = 0$

B. $x = 1$

C. $x = -1$

D. $x = 1 - \sqrt{3}$

Câu 11. Một nguyên hàm của hàm số: $y = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$ là:

A. $F(x) = x\sqrt{2-x^2}$

B. $-\frac{1}{3}(x^2+4)\sqrt{2-x^2}$

C. $-\frac{1}{3}x^2\sqrt{2-x^2}$

D. $-\frac{1}{3}(x^2-4)\sqrt{2-x^2}$

Câu 12. Tìm nguyên hàm $F(x)$ biết $f(x) = \frac{2x}{x + \sqrt{x^2-1}}$. Kết quả là:

A. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

B. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

C. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2-1}$

D. $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2-1}$

Câu 13. Tìm nguyên hàm $F(x)$ biết $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$. Kết quả là:

A. $F(x) = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x + \cos x|) + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x + \cos x|) + C$

C. $F(x) = \frac{1}{2}(x - \ln|\sin x - \cos x|) + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2}(x + \ln|\sin x - \cos x|) + C$

Câu 14. Tính nguyên hàm $\int x e^{x^2+1} dx$, ta được:

A. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

B. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2-1} + C$

C. $F(x) = -\frac{1}{2} e^{x^2+1} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$

Câu 15. Tính $\int 2^{\sqrt{x}} \frac{\ln 2}{\sqrt{x}} dx$. Kết quả sai là:

A. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} - 1) + C$

B. $F(x) = 2(2^{\sqrt{x}} + 1) + C$

C. $F(x) = 2^{\sqrt{x}} + C$

D. $F(x) = 2^{\sqrt{x}+1} + C$

Câu 16. Hàm số nào dưới đây là một nguyên hàm của $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$?

A. $F(x) = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

B. $F(x) = \ln\sqrt{1+x^2}$

C. $F(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

D. $F(x) = \ln(x - \sqrt{1+x^2})$

Câu 17. Tìm $\int \frac{\cos x}{\sin^{20} x} dx$.

A. $F(x) = -\frac{1}{19 \sin^{19} x} + C$

B. $F(x) = \frac{1}{19 \sin^{19} x} + C$

C. $F(x) = -\frac{1}{19 \cos^{19} x} + C$

D. $F(x) = \frac{1}{19 \cos^{19} x} + C$

Câu 18. Một nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$ thỏa $F(0) = -\ln 3$ là

A. $F(x) = \ln(e^x + 2) + \ln 3$

B. $F(x) = \ln(e^x + 2) - \ln 3$

C. $F(x) = \ln(e^x + 2) + 2 \ln 3$

D. $F(x) = \ln(e^x + 2) - 2 \ln 3$

Câu 19. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^{3 \cos x} \cdot \sin x$

A. $\int f(x) dx = \frac{1}{3} e^{3 \cos x} \cdot \cos x + C$

B. $\int f(x) dx = 3e^{3 \cos x} + C$

C. $\int f(x) dx = -\frac{1}{3} e^{3 \cos x} + C$

D. $\int f(x) dx = 3e^{3 \cos x} \cdot \cos x + C$

Câu 20. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}+4}$ là:

A. $F(x) = \sqrt{2x-1} - 4 \ln(\sqrt{2x-1} + 4) + C$

B. $F(x) = \sqrt{2x+1} - 4 \ln(\sqrt{2x+1} + 4) + C$

C. $F(x) = \sqrt{2x-1} + 4 \ln(\sqrt{2x+1} + 4) + C$

D. $F(x) = \sqrt{2x-1} - \frac{7}{2} \ln(\sqrt{2x-1} + 4) + C$

Câu 21. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int \frac{(x^2 + x)e^x}{x + e^{-x}} dx$ là:

A. $F(x) = xe^x + 1 - \ln|xe^x + 1| + C$

B. $F(x) = e^x + 1 - \ln|xe^x + 1| + C$

C. $F(x) = xe^x + 1 - \ln|xe^{-x} + 1| + C$

D. $F(x) = xe^x + 1 + \ln|xe^x + 1| + C$

Câu 22. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ là:

A. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

B. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

C. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

D. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

Câu 23. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$ là:

A. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| + C$

B. $\frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$

C. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$

D. $\frac{1}{a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

Câu 24. Nguyên hàm của hàm số: $y = \int x\sqrt{4x+7} dx$ là:

A. $\frac{1}{20} \left[\frac{2}{5} (4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3} (4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

B. $\frac{1}{18} \left[\frac{2}{5} (4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3} (4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

C. $\frac{1}{14} \left[\frac{2}{5} (4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3} (4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$ D. $\frac{1}{16} \left[\frac{2}{5} (4x+7)^{\frac{5}{2}} - 7 \cdot \frac{2}{3} (4x+7)^{\frac{3}{2}} \right] + C$

DẠNG 3 : PHƯƠNG PHÁP NGUYÊN HÀM TỪNG PHẦN

Câu 1. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^x$ là:

A. $e^x + C$ B. $e^x(x-1) + C$ C. $e^x(x+1) + C$ D. $\frac{x^2}{2}e^x + C$

Câu 2. Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = (x^2 + 2x).e^x$ là:

A. $(2x+2).e^x$ B. x^2e^x C. $(x^2+x).e^x$ D. $(x^2-2x).e^x$

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = xe^{-x}$. Một nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$ thỏa $F(0) = 1$ là:

A. $-(x+1)e^{-x} + 1$ B. $-(x+1)e^{-x} + 2$ C. $(x+1)e^{-x} + 1$ D. $(x+1)e^{-x} + 2$

Câu 4. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = xe^{x^2}$ là hàm số:

A. $F(x) = 2e^{x^2}$ B. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ C. $F(x) = 2x^2e^{x^2}$ D. $F(x) = e^{x^2} + xe^{x^2}$

Câu 5. Cho $f(x) = \int_1^x \ln t dt$. Đạo hàm $f'(x)$ là hàm số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{x}$ B. $\ln x$ C. $\ln^2 x$ D. $\frac{1}{2} \ln^2 x$

Câu 6. Hàm số $f(x) = (x+1)\sin x$ có các nguyên hàm là:

A. $F(x) = (x+1)\cos x + \sin x + C$ B. $F(x) = -(x+1)\cos x + \sin x + C$
 C. $F(x) = -(x+1)\cos x - \sin x + C$ D. $F(x) = (x+1)\cos x - \sin x + C$

Câu 7. Gọi hàm số $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = x \cos 3x$, biết $F(0) = 1$. Vậy $F(x)$ là:

A. $F(x) = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + C$ B. $F(x) = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + 1$
 C. $F(x) = \frac{1}{6}x^2 \sin 3x$ D. $F(x) = \frac{1}{3}x \sin 3x + \frac{1}{9} \cos 3x + \frac{8}{9}$

Câu 8. Tìm $\int x \cos 2x dx$ là:

A. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$ B. $\frac{1}{2}x \sin 2x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$
 C. $\frac{x^2 \sin 2x}{4} + C$ D. $\sin 2x + C$

Câu 9. Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

A. $\int x \sin x dx = \frac{-x^2 \cdot \cos x}{2} + C$ B. $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$
 C. $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$ D. $\int x \sin 2x dx = \frac{-x \cos 2x}{2} + \frac{1}{4} \sin 2x + C$

Câu 10. Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

A. $\int xe^{3x} dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{1}{9}e^{3x} + C$ B. $\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$
 C. $\int xe^x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^x + C$ D. $\int \frac{x}{e^x} dx = \frac{-x}{e^x} - \frac{1}{e^x} + C$

Câu 11. Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

A. $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$

B. $\int \ln x dx = \frac{1}{x} + C$

C. $\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

D. $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

Câu 12. Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

A. $\int \ln^2 x dx = x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C$

B. $\int \ln^2 x dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$

C. $\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$

D. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx = \frac{-\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$

Câu 13. Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

A. $\int \frac{x}{e^{2x}} dx = \frac{-x}{2e^{2x}} - \frac{1}{4e^{2x}} + C$

B. $\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + C$

C. $\int x e^{3x} dx = \frac{x e^{3x}}{3} - \frac{1}{9} e^{3x} + C$

D. $\int x e^{2x} dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^{2x} + C$

Câu 14. Kết quả nào sai trong các kết quả sau ?

A. $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} + C$

B. $\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C$

C. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$

D. $\int e^x \sin x dx = \frac{e^x (\sin x - \cos x)}{2} + C$

Câu 15. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot \sin(2x + 1)$

A. $\int f(x) dx = -\frac{x}{2} \cdot \cos(2x + 1) + \frac{1}{4} \cdot \sin(2x + 1) + C$

B. $\int f(x) dx = -\frac{x^2}{4} \cdot \cos(2x + 1) + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{x}{2} \cdot \cos(2x + 1) - \frac{1}{4} \cdot \sin(2x + 1) + C$

D. $\int f(x) dx = -\frac{x}{2} \cdot \cos(2x + 1) + \frac{1}{2} \cdot \sin(2x + 1) + C$

Câu 16. Tìm nguyên hàm của hàm số $f(x) = x \cdot \ln(1 + x)$

A. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2(x+1)} + C$

B. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{6} x^3 \ln(1+x) + C$

C. $\int f(x) dx = \frac{1}{2} (x^2 - 1) \cdot \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 + \frac{x}{2} + C$

D. $\int f(x) dx = \frac{x^2}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln(x+1) + C$

Câu 17. Nguyên hàm của hàm số: $I = \int (x - 2) \sin 3x dx$ là:

A. $F(x) = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + C$

B. $F(x) = \frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9} \sin 3x + C$

$$\text{C. } F(x) = -\frac{(x+2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{9}\sin 3x + C \quad \text{D. } F(x) = -\frac{(x-2)\cos 3x}{3} + \frac{1}{3}\sin 3x + C$$

Câu 18. Cho $f(x) = \frac{4m}{\pi} + \sin^2 x$. Tìm m để nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)$ thỏa mãn

$$F(0) = 1 \text{ và } F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}$$

- A. $m = -\frac{4}{3}$ B. $m = \frac{3}{4}$ C. $m = \frac{4}{3}$ D. $m = -\frac{3}{4}$

Câu 19. Giả sử $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \sin 2x dx = a + b \frac{\sqrt{2}}{2}$ khi đó $a + b$ là

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $-\frac{3}{10}$ D. $\frac{1}{5}$

Câu 20. Để hàm số $f(x) = a \sin \pi x + b$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $\int_0^1 f(x) dx = 4$ thì a, b nhận giá trị:

- A. $a = \pi, b = 0$ B. $a = \pi, b = 2$ C. $a = 2\pi, b = 2$ D. $a = 2\pi, b = 3$

Câu 21. Cho $f(x) = A \sin 2x + B$. Tìm A và B , biết $f'(0) = 4$ và $\int_0^{2\pi} f(x) dx = 3$

- A. $A = 2, B = \frac{1}{2\pi}$ B. $A = 1, B = \frac{3}{2\pi}$ C. $A = 2, B = \frac{3}{2\pi}$ D. $A = 1, B = \frac{1}{2\pi}$

Câu 22. Cho $I = \int_0^1 (ax - e^x) dx$. Xác định a để $I < 1 + e$.

- A. $a < 4e$. B. $a < 4e + 1$. C. $a < 2e$. D. $a < 2e + 2$.

Câu 23. Nếu $I = \int_{-2}^0 \left(4 - e^{\frac{x}{2}}\right) dx = K - 2e$ thì giá trị của K là:

- A. 11 B. 10 C. 12,5 D. 9

Câu 24. Cho tích phân $\int_1^2 \frac{(x^2 - 2x)(x - 1)}{x + 1} dx = a + b \ln 3 + c \ln 2$ ($a, b, c \in \mathbb{Q}$). Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A. $a < 0$ B. $c < 0$ C. $b > 0$ D. $a + b + c > 0$

Câu 25. Tìm các hằng số A, B để hàm số $f(x) = A \sin \pi x + B$ thỏa các điều kiện: $f'(1) = 2$; $\int_0^2 f(x) dx = 4$

- A. $\begin{cases} A = -\frac{2}{\pi} \\ B = 2 \end{cases}$ B. $\begin{cases} A = \frac{2}{\pi} \\ B = -2 \end{cases}$ C. $\begin{cases} A = -\frac{\pi}{2} \\ B = 2 \end{cases}$ D. $\begin{cases} A = \frac{2}{\pi} \\ B = 2 \end{cases}$

Dạng toán 2. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

$$\int_a^b [f(x)] \cdot u'(x) \cdot dx = F[u(x)] \Big|_a^b = F[u(b)] - F[u(a)].$$

- **Bước 1.** Biến đổi để chọn phép đặt $t = u(x) \Rightarrow dt = u'(x) \cdot dx$ (xem lại các phương pháp đổi biến số trong phần nguyên hàm)
- **Bước 2.** Đổi cận: $\begin{cases} x = b \\ x = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = u(b) \\ t = u(a) \end{cases}$ (nhớ: **đổi biến phải đổi cận**)
- **Bước 3.** Đưa về dạng $I = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t) \cdot dt$ đơn giản hơn và dễ tính toán.

Câu 1. Biến đổi $\int_0^3 \frac{x}{1+\sqrt{1+x}} dx$ thành $\int_1^2 f(t) dt$ với $t = \sqrt{1+x}$. Khi đó $f(t)$ là hàm nào trong các hàm sau đây?

- A.** $f(t) = 2t^2 - 2t$ **B.** $f(t) = t^2 + t$ **C.** $f(t) = 2t^2 + 2t$ **D.** $f(t) = t^2 - t$

Câu 2. Cho tích phân $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$, với cách đặt $t = \sqrt[3]{1-x}$ thì tích phân đã cho bằng với tích phân nào

- A.** $3 \int_0^1 t^3 dt$. **B.** $3 \int_0^1 t^2 dt$. **C.** $\int_0^1 t^3 dt$. **D.** $3 \int_0^1 t dt$.

Câu 3. Tích phân $I = \int_2^{2\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{x^2-3}} dx$ bằng:

- A.** $\frac{\pi}{6}$. **B.** π . **C.** $\frac{\pi}{3}$. **D.** $\frac{\pi}{2}$.

Câu 4. Tích phân $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$ ($a > 0$) bằng

- A.** $\frac{\pi \cdot a^4}{8}$. **B.** $\frac{\pi \cdot a^4}{16}$. **C.** $\frac{\pi \cdot a^3}{16}$. **D.** $\frac{\pi \cdot a^3}{8}$.

Câu 5. Biết tích phân $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x} dx = \frac{M}{N}$, với $\frac{M}{N}$ là phân số tối giản. Giá trị $M + N$ bằng:

- A.** 35 **B.** 36 **C.** 37 **D.** 38

Câu 6. Đổi biến $x = 2\sin t$ tích phân $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$ trở thành:

- A.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} t dt$ **B.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} dt$ **C.** $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{t} dt$ **D.** $\int_0^{\frac{\pi}{3}} dt$

Dạng toán 3. TÍNH TÍCH PHÂN BẰNG PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Định lý: Nếu $u = u(x)$ và $v = v(x)$ là hai hàm số có đạo hàm và liên tục trên đoạn $[a; b]$ thì:

$$I = \int_a^b u(x) \cdot v'(x) \cdot dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \cdot v(x) \cdot dx \text{ hay } I = \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Thực hành:

– **Nhận dạng:** Tích 2 hàm khác loại nhân nhau, chẳng hạn: mũ nhân lượng giác,...

– **Đặt:** $\begin{cases} u = \dots\dots\dots \xrightarrow{\text{Vi phân}} du = \dots\dots\dots dx \\ dv = \dots\dots\dots dx \xrightarrow{\text{Nguyên hàm}} v = \dots\dots\dots \end{cases}$. Suy ra: $I = \int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

- **Thứ tự ưu tiên chọn u:** log – đa – lượng – mũ và $dv = \text{phần còn lại}$. Nghĩa là nếu có \ln hay $\log_a x$ thì chọn $u = \ln$ hay $u = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln x$ và $dv = \text{còn lại}$. Nếu không có \ln ; \log thì chọn $u = \text{đa thức}$ và $dv = \text{còn lại}$. Nếu không có \log , đa thức, ta chọn $u = \text{lượng giác}$,....
- **Lưu ý** rằng bậc của đa thức và bậc của \ln tương ứng với số lần lấy nguyên hàm.
- Dạng **mũ nhân lượng giác** là dạng nguyên hàm từng phần luân hồi.

Câu 1. Biết rằng tích phân $\int_0^1 (2x+1)e^x dx = a + b \cdot e$. Khi đó tích ab bằng

- A.** 1. **B.** -1. **C.** -15. **D.** 2.

Câu 2. Tìm $a > 0$ sao cho $\int_0^a x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx = 4$

III, ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN TRONG HÌNH HỌC

1. Tính diện tích hình phẳng

Note: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường

$$y = f(x); y = g(x); x = a; x = b \ (a < b) \text{ là: } S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Chú ý: Nếu bài toán cho thiếu một trong hai đường thẳng $x = a$ hoặc $x = b$ hoặc cả hai thì ta phải đi giải phương trình $f(x) = g(x)$ để tìm ra chúng.

2. Tính thể tích vật thể tròn xoay

Note: Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f(x); y = 0; x = a; x = b \ (a < b)$ quanh Ox là:

$$V_{Ox} = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Câu 1.

Câu 1: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = (e + 1)x, y = (1 + e^x)x$ là:

- A. $\frac{e}{2} - 2 (dvdt)$ B. $\frac{e}{2} - 1 (dvdt)$ C. $\frac{e}{3} - 1 (dvdt)$ D. $\frac{e}{2} + 1 (dvdt)$

Câu 2: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sin 2x, y = \cos x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = \frac{\pi}{2}$ là :

- A. $\frac{1}{4} (dvdt)$ B. $\frac{1}{6} (dvdt)$ C. $\frac{3}{2} (dvdt)$ D. $\frac{1}{2} (dvdt)$

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = x, y = \sin^2 x + x \ (0 < x < \pi)$ có kết quả là

- A. π B. $\frac{\pi}{2}$ C. 2π D. $\frac{\pi}{3}$

Câu 4: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong (C) : $y = e^x$, trục Ox, trục Oy và đường thẳng $x = 2$. Diện tích của hình phẳng (H) là :

- A. $e + 4$ B. $e^2 - e + 2$ C. $\frac{e^2}{2} + 3$ D. $e^2 - 1$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \frac{x^3}{1 - x^2}; y = x$ là:

- A. 1 B. $1 - \ln 2$ C. $1 + \ln 2$ D. $2 - \ln 2$

Câu 6: Cho (C) : $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 - 2x - 2m - \frac{1}{3}$. Giá trị $m \in \left(0; \frac{5}{6}\right)$ sao cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), $y = 0, x = 0, x = 2$ có diện tích bằng 4 là:

- A. $m = -\frac{1}{2}$ B. $m = \frac{1}{2}$ C. $m = \frac{3}{2}$ D. $m = -\frac{3}{2}$

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x - e^{-x}; Ox; x = 1$ là:

- A. 1 B. $e + \frac{1}{e} - 1$ C. $e + \frac{1}{e}$ D. $e + \frac{1}{e} - 2$

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = 5 + |x|, y = |x^2 - 1|, x = 0, x = 1$ có kết quả là:

- A. $\frac{29}{6}$ B. $\frac{26}{3}$ C. $\frac{25}{3}$ D. $\frac{27}{3}$

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = |\ln x|; y = 1$ là:

- A. $e - 2e^2 + 2$ B. $e + \frac{1}{e} - 2$ C. $e^2 + 2e - 1$ D. 3

Câu 10: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}, y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ là:

- A. $2\pi + \frac{4}{3}(dvdv)$ B. $\frac{2\pi + 4}{3}(dvdv)$ C. $\pi + \frac{4}{3}(dvdv)$ D. $2\pi - \frac{4}{3}(dvdv)$

Câu 11: Với giá trị m dương nào thì diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y = x^2$ và $y = mx$ bằng $\frac{4}{3}$ đơn vị diện tích?

- A. $m = 1$ B. $m = 2$ C. $m = 3$ D. $m = 4$

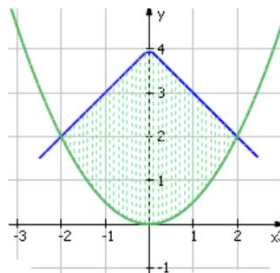
Câu 12: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3x + 1$ và tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của đồ thị và trục tung?

- A. $\frac{27}{4}$ B. $\frac{5}{3}$ C. $\frac{23}{4}$ D. $\frac{4}{7}$

Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại $A(1;2)$ và $B(4;5)$ có kết quả dạng $\frac{a}{b}$. Khi đó $a + b$ bằng

- A. 12 B. $\frac{13}{12}$ C. 13 D. $\frac{4}{5}$

Câu 14: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường $y = 4 - |x|$ và $y = \frac{x^2}{2}$ bằng:



- A. $\frac{28}{3}$ B. $\frac{25}{3}$ C. $\frac{22}{3}$ D. $\frac{26}{3}$

Câu 15: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + 2x$ trục Ox và hai đường thẳng $x = 0, x = a, (a < 0)$ là:

- A. $a^3 + a^2$ B. $-\frac{1}{3}a^3 + a^2$ C. $-\frac{1}{3}a^3 - a^2$ D. $\frac{1}{3}a^3 + a^2$

Câu 16: Diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y = x^2 + ax - a$ và $y = x$ với $a < 1$ là:

A. $\frac{(a + 1)^3}{6}$

B. $\frac{5a^3 - 9a^2 + 3a + 1}{6}$

C. $\frac{a^3 + 3a^2 - 3a - 1}{6}$

D. $\frac{5a^3 - 9a^2}{6}$

Câu 17: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = \frac{1}{e}, x = e$ là:

A. $2 - \frac{2}{e} (dvdt)$

B. $\frac{1}{e} (dvdt)$

C. $e + \frac{1}{e} (dvdt)$

D. $e - \frac{1}{e} (dvdt)$

Câu 18: Cho hình phẳng (H) như hình vẽ:

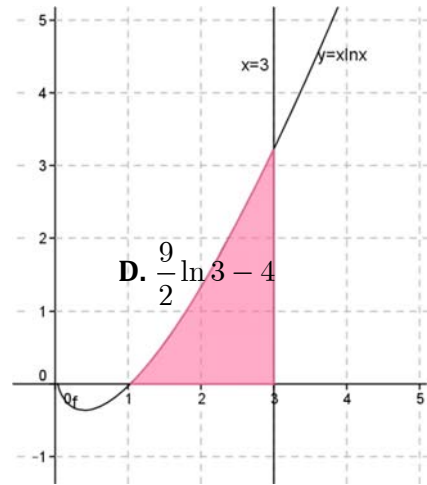
Diện tích hình phẳng (H) là

A. $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$

B. 1

C. $\frac{9}{2} \ln 3 - \frac{3}{2}$

D. $\frac{9}{2} \ln 3 - 4$



Câu 19: Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) được giới hạn bởi các đường sau: $y = f(x)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a, x = b$ xung quanh trục Ox là:

A. $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

B. $V = \int_a^b f^2(x) dx$

C. $V = \pi \int_a^b f(x) dx$

D. $V = 2\pi \int_a^b f^2(x) dx$

Câu 20: Thể tích khối tròn xoay sinh ra do quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^3$, trục Ox , $x = -1, x = 1$ một vòng quanh trục Ox là:

A. π

B. 2π

C. $\frac{6\pi}{7}$

D. $\frac{2\pi}{7}$

Câu 21: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = x^2, x = y^2$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{8\pi}{3}$

B. $\frac{2\pi}{5}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{3\pi}{10}$

Câu 22: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = 2x - x^2, y = 0$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{17\pi}{15}$

B. $\frac{16\pi}{15}$

C. $\frac{14\pi}{15}$

D. $\frac{13\pi}{15}$

Câu 23: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đường $y = x^2, y = 2x$. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) xung quanh trục Ox là

A. $\frac{16\pi}{15}$.

B. $\frac{21\pi}{15}$.

C. $\frac{32\pi}{15}$.

D. $\frac{64\pi}{15}$.