TRƯỜNG THPT TRẦN BÌNH TRỌNG
TỔ TOÁN

MỘT SỐ BÀI TOÁN GIẢI BẰNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

(Tham gia vào bộ chuyên đề Toán giúp HS thi HSG bảng B và ĐH của Sở**)**

I. Mở đầu

Chúng ta biết rằng, nói chung, mỗi vấn đề của Hình học đều có thể thể hiện theo cách thức của Hình học giải tích. Do đó, có thể giải một bài toán Hình học nói chung, hình học phẳng nói riêng bằng cách tọa độ hóa để chuyển thành bài toán Hình học giải tích. Sau đây chúng ta bàn đến việc chuyển đổi một bài toán hình học phẳng sang bài toán Hình học giải tích như thế nào. Việc chuyển đổi này gồm các bước sau:

Bước 1 : **Chọn hệ trục tọa độ.**

Bước này sẽ dễ dàng thực hiện nếu trong bài toán Hình học phẳng đang xét có sẵn tam giác vuông hoặc tam giác cân hoặc tam giác đều hay có quan hệ vuông góc của hai đường thẳng. Tuy nhiên không ít trường hợp phải phát hiện, kẻ thêm các đường phụ để tạo nên đường thẳng vuông góc.

Một trong các nguyên tắc không thể bỏ qua là chọn hệ trục tọa độ vuông góc sao cho việc tính toán tọa độ các điểm, viết phương trình các đường được dễ dàng, thuận lợi.

Bước 2 : **Tính tọa độ các điểm cho trong đề bài theo hệ tọa độ vừa chọn.**

Thực ra chỉ cần tính tọa độ của những điểm liên quan đến giả thiết và kết luận của bài toán.

Với những bài toán đã có sẵn số liệu thì việc tính toán tọa độ ta dựa vào hình vẽ. Đối với bài toán mà chưa cho số liệu thì ta cần đưa số liệu vào và sau đó dựa vào hình vẽ dể tính tọa độ các điểm theo số liệu đó. Một thủ thuật nhằm giúp cho việc tính toán đơn giản đi là hay chọn đơn vị của trục bằng độ dài một cạnh, một đoạn thẳng nào đó có trong giả thiết.

Bước 3 : **Thực hiện các sự kiện của giả thiết đã cho**

Trong giả thiết của bài toán thường cho các quan hệ song song, quan hệ vuông góc, góc của hai đường thẳng, khoảng cách giữa hai đói tượng hình học hoặc các sự kiện hình học khác. Bằng các phép toán của Hình học giải tích, ta thực hiện biến đổi, đưa ra các hệ thức điều kiện, hệ thức ràng buộc.

Bước 4 : **Đưa ra các kết luận mà bài toán cần giải quyết .**

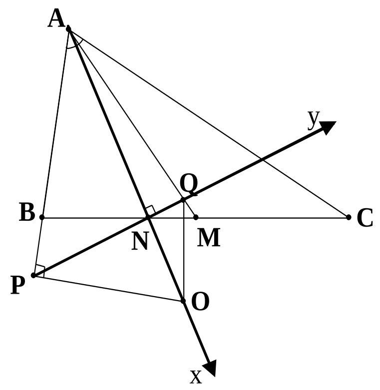
Từ các hệ thức thu được ở bước 3, ta "phiên dịch" từ ngôn ngữ của hình học giải tích sang ngôn ngữ của hình học phẳng.

Ta cũng nhận thấy, mặc dù các sự kiện của hình học nói chung và của hình học phẳng nói riêng đều có thể trình chuyển đổi sang ngôn ngữ của Hình học giải tích, tuy vậy có mức độ khó, dễ khác nhau. Điều đó dẫn tới việc có rất nhiều bài toán hình học gặp nhiều khó khăn khi chuyển đổi sang ngôn ngữ Hình học giải tích.

Phương pháp tọa độ hóa bài toán hình học phẳng để dùng công cụ Hình học giải tích giải bài toán khá hữu hiệu tuy vậy ta không nên tuyệt đối hóa nó.

II. Một số bài toán minh họa

Bài 1. Cho tam giác *ABC* có *M* là trung điểm cạnh *BC*, *N* là chân đường phân giác góc $\widehat{BAC}$. Đường thẳng vuông góc với *NA* tại *N* cắt các đường thẳng *AB, AM* lần lượt tại *P, Q* theo thứ tự đó. Đường thẳng vuông góc với *AB* tại *P* cắt *AN* tại *O*. Chứng minh *OQ* vuông *BC*.



Gợi ý.

Chọn hệ trục tọa độ *Nxy* sao cho *A, N* nằm trên trục hoành.

Vì *AB* không song song với các trục tọa độ nên phương trình của nó có dạng:

$y = ax + b$ ($a \neq 0$). Khi đó : $A = \left(-\frac{b}{a};0\right)$, $P = (0;b)$.

AC đi qua *A* và đối xứng với *AB* qua trục hoành nên có phương trình :

$y = -ax - b$.

PO đi qua *P*, vuông góc với *AB* nên có phương trình : $y = -\frac{1}{a}x + b$.

O là giao điểm của *PO* và trục hoành nên $O = (ab,0)$.

BC đi qua gốc tọa độ nên:

+) Nếu *BC* không nằm trên trục tung thì phương trình *BC* có dạng $y = cx$ với $c \neq 0$, $c \neq \pm a$ (vì *B, C* không thuộc trục hoành, *BC* không song song với *AB* và *AC*).

B là giao điểm của *BC* và *AB* nên tọa độ *B* là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = ax + b \\ y = cx \end{cases} \Rightarrow B = \left(\frac{b}{c-a};\frac{bc}{c-a}\right).$$

C là giao điểm của *BC* và *AC* nên tọa độ *C* là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y = -ax - b \\ y = cx \end{cases} \Rightarrow C = \left(-\frac{b}{c+a};-\frac{bc}{c+a}\right).$$

Do đó : $M = \left(\frac{ab}{c^2-a^2};\frac{abc}{c^2-a^2}\right)$, suy ra : $\overrightarrow{AM} = \frac{bc}{a(c^2-a^2)}\left(c;a^2\right)$.

Từ đó ta có phương trình của *AM* là : $y = \frac{a^2}{c}x + \frac{ab}{c}$.

Q là giao điểm của *AM* với trục tung nên

$$Q=\left(0;\frac{ab}{c}\right)\Rightarrow \overrightarrow{QO}=ab\left(1;-\frac{1}{c}\right).$$

Do đó $\overrightarrow{QO}$ là một vectơ pháp tuyến của *BC* nên *QO* vuông góc *BC*.

+) Nếu *BC* nằm trên trục tung thì tam giác *ABC* cân tại *A* nên *M* ≡*N*, do đó *O* thuộc *AN* nên *QO* vuông góc *BC*.

Bài 2.

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(1;4)$. Đường thẳng *d* qua *M*, *d* cắt trục hoành tại *A*(hoành độ của *A* dương), *d* cắt trục tung tại *B*(tung độ của *B* dương). Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác *OAB*.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn *(C)*: $(x-2)^2+(y+3)^2=9$ và điểm $A(1;-2)$. Đường thẳng Δ qua *A*, Δ cắt *(C)* tại *M* và *N*. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng *MN*.

Gợi ý.

a) $M(1;4)$. Đường thẳng *d* qua *M*, *d* cắt trục hoành tại *A*; *d* cắt trục tung tại *B*. Tìm giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác *OAB*($x_A;y_B>0$)

Giả sử A(a;0); B(0;b), a>0; b>0. PT đường thẳng AB: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

Vì AB qua M nên $\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\Rightarrow 1\ge 2\sqrt{\frac{4}{ab}}\Rightarrow 1\ge\frac{16}{ab}$

$\Rightarrow \frac{ab}{2}\ge 8;"="\Leftrightarrow \frac{1}{a}=\frac{4}{b}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\ b=8\end{cases}$

Diện tích tam giác vuông OAB(vuông ở O)là S $=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{1}{2}ab\ge 8$. Vậy S nhỏ nhất bằng 8 khi *d* qua A(2;0), B(0;8)

b) *(C)*: $(x-2)^2+(y+3)^2=9$; $A(1;-2)$. Δ qua *A*, Δ cắt *(C)* tại *M* và *N*. Tìm giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng *MN*.

(C) có tâm I(2;-3), bán kính R=3. Có A nằm trong đường tròn(C) vì

$IA^2=(1-2)^2+(-2+3)^2=2<9$

Kẻ IH vuông góc với MN tại H ta có

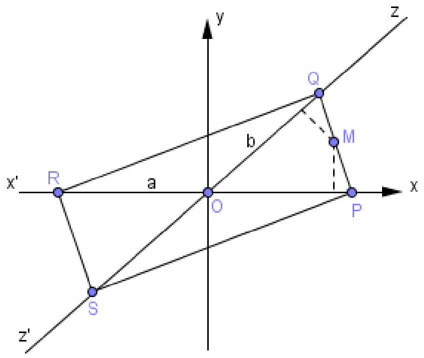
$IH^2+HN^2=IN^2=9\Rightarrow MN^2=4HN^2=4(9-IH^2)$

Mà $IH\perp AH\Rightarrow IH\le IA=\sqrt{2}\Rightarrow MN^2\ge 4(9-2)=28\Rightarrow MN\ge 2\sqrt{7}$

Vậy MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{7}$ khi H trùng A hay MN vuông góc với IA tại A.

Bài 3: Cho hai đường thẳng cắt nhau a và b . Tìm tập hợp những điểm M sao cho tổng khoảng cách từ đó tới a và b luôn luôn bằng số 1 không đổi .

Gợi ý:



Ta chọn hệ trục tọa độ Oxy với O là giao điểm của a và b , Ox là đường thẳng a sao cho đường thẳng b có phương trình y = kx (k > 0)

Giả sử M(x ; y) là điểm nào đó , kẻ MA ⊥ a , MB ⊥ b .

Khi đó , ta có thể tính được các khoảng cách MA và MB : $MA = |y|$, $MB = \dfrac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}}$

Vậy , với điều kiện bài toán là $|y| + \dfrac{|kx-y|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$ (1) . Ta chia các trường hợp sau :

a) $y \ge 0$ và $y \le kx$. Dễ thấy rằng khi đó M nằm trong góc xOz .

$$(1) \Leftrightarrow y + \frac{kx-y}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow kx + \left(\sqrt{k^2+1}-1\right)y - \sqrt{k^2+1} = 0 \quad (2)$$

Như vậy , tập hợp M là phần đường thẳng (2) nằm trong góc xOz , tức là đoạn PQ (hình vẽ) .

b) $y \ge 0$ và $y \ge kx$. Khi đó M nằm trong góc zOx’ và :

$$(1) \Leftrightarrow y + \frac{-kx+y}{\sqrt{k^2+1}} = 1 \Leftrightarrow -kx + \left(\sqrt{k^2+1}+1\right)y - \sqrt{k^2+1} = 0 \quad (3)$$

Như vậy tập hợp M là phần đường thẳng (3) nằm trong zOx’, tức là đoạn thẳng PR (hình vẽ) .

Dễ thấy rằng tích vô hương của hai vectơ pháp tuyến :

$\vec{n}_{PQ} = \left(k ; \sqrt{k^2+1}-1\right)$, $\vec{n}_{PR} = \left(-k ; \sqrt{k^2+1}+1\right)$ bằng 0 , tức là PQ ⊥ PR

Tương tự như trường hợp a) và b) , ta xét các trường hợp :

c) $y \le 0$ và $y \le kx$

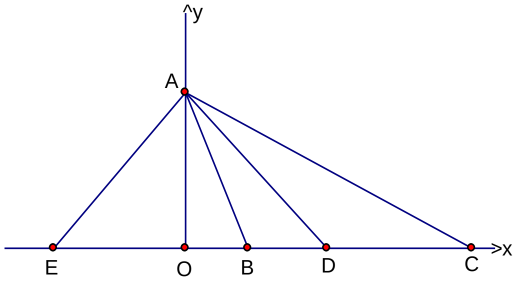
d) $y \le 0$ và $y \ge kx$,

Ta đi đến kết luận :Tập hợp các điểm M là một hình chữ nhật QPRS có tâm là O và hai đường chéonằm trên a và b.

Bài 4. Cho tam giác ABC có hai đường phân giác trong và ngoài góc A cắt cạnh BC tại D và E. Chứng minh rằng nếu AD = AE thì $AB^2 + AC^2 = 4R^2$ (trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC).

Gợi ý

Chọn hệ trục như hình vẽ



Theo giả thiết tam giác ADE vuông cân tại A.
Khi đó OA = OE = OD nên $B(b;0), A(0;a), D(a;0), E(-a;0), C(c;0)$

Theo tính chất đường phân giác $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB^2}{DC^2} = \frac{AB^2}{AC^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-a)^2}{(c-a)^2} = \frac{b^2+a^2}{c^2+a^2} \Leftrightarrow (b-a)^2(c^2+a^2) = (c-a)^2(b^2+a^2) \Leftrightarrow c = \frac{a^2}{b}$$

Ta có $AB^2 + AC^2 = (a^2+b^2) + (a^2 + \frac{a^4}{b^2}) = \left(\frac{a^2+b^2}{b}\right)^2$

Gọi I(x;y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, ta có

$$\begin{cases} AI = BI \\ BI = CI \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b^2+a^2}{2b} \\ a \end{cases}$$

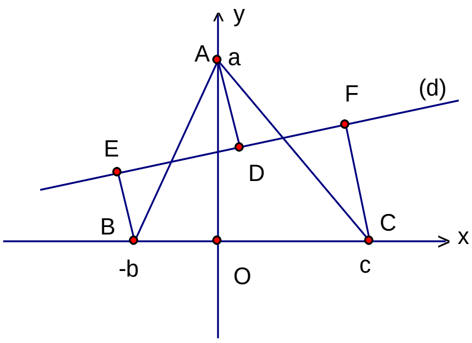
Suy ra $4R^2 = 4AI^2 = 4\left[\left(\frac{b^2+a^2}{2b}\right)^2 + (a-a)^2\right] = \left(\frac{b^2+a^2}{b}\right)^2$

Từ đó suy ra $AB^2 + AC^2 = 4R^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC nhọn. (D) là một đường thẳng thay đổi. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C lên (D). Biết rằng $AD^2 \tan A + BE^2 \tan B + CF^2 \tan C = 2S_{ABC}$. Xác định vị trí của đường thẳng (D) để AD lớn nhất.

Gợi ý:

Chọn hệ trục như hình vẽ (b , c >0)



Ta có $\tan B = \frac{a}{b}, \tan C = \frac{a}{c}$

$$\tan A = \frac{\tan B + \tan C}{\tan B.\tan C - 1} = \frac{a(b+c)}{a^2 - bc}, \quad 2S_{ABC} = a(b+c)$$

Giả sử phương trình (d) : $x.\sin\alpha + y.\cos\alpha + d = 0$

$$AD = d(A,d) = |a\cos\alpha + d|$$

$$BE = d(B,d) = |-b\sin\alpha + d|$$

$CF = d(C,d) = |c\sin\alpha + d|$

Theo giả thiết $AD^2\tan A + BE^2\tan B + CF^2\tan C = 2S_{ABC}$

$$\Leftrightarrow (a\cos\alpha + d)^2\frac{a(b+c)}{a^2 - bc} + \frac{a}{b}(-b\sin\alpha + d)^2 + \frac{a}{c}(c\sin\alpha + d)^2 = a(b+c)$$

$$\Leftrightarrow bc.\cos^2\alpha + 2ad.\cos\alpha + \frac{a^2d^2}{bc} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc}{a}.\cos\alpha + d = 0$$

Điều này chứng tỏ (d) đi qua $H\left(0;\frac{bc}{a}\right)$ là trực tâm tam giác ABC.

Vậy AD max = AH, khi (d) đi qua H và song song với BC.

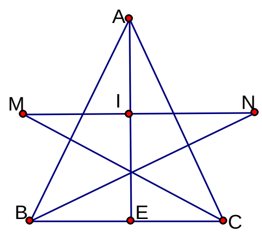
Bài 6.

a) Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại A, cạnh BC nằm trên đường thẳng có phương trình: $2x + y - 2 = 0$. Đường cao kẻ từ B có phương trình: $x + y + 1 = 0$, điểm $M(1;1)$ thuộc đường cao kẻ từ đỉnh C. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác ABC.

b) Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A,B,C,D sao cho bốn điểm đó không cùng nằm trên một đường thẳng.

Chứng minh rằng: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

Gợi ý



a) Toạ độ B là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$

Suy ra $B(3;-4)$

Gọi d là đường thẳng qua M song song với BC $\Rightarrow d: 2x + y - 3 = 0$

Gọi N là giao điểm của d với đường cao kẻ từ B. Toạ độ N là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ Suy ra $N(4;-5)$

Gọi I là trung điểm MN $\Rightarrow I\left(\frac{5}{2};-2\right)$.

Gọi E là trung điểm BC. Do tam giác ABC cân nên IE là đường trung trực BC, IE đi qua I vuông góc với BC $\Rightarrow IE: x - 2y - \frac{13}{2} = 0$.

Toạ độ E là nghiệm của hệ $\begin{cases} x - 2y - \frac{13}{2} = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{21}{10},-\frac{11}{5}\right) \Rightarrow C\left(\frac{6}{5};-\frac{2}{5}\right)$.

CA đi qua C vuông góc với BN suy ra $CA: x - y - \frac{8}{5} = 0$

Toạ đô A là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-2y-\dfrac{13}{2}=0 \\ x-y-\dfrac{8}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow A\left(-\dfrac{33}{10};-\dfrac{49}{10}\right)$

b)Trong mặt phẳng cho bốn điểm phân biệt A,B,C,D và không cùng nằm trên đường thẳng. Chứng minh rằng: $AC \perp BD \Leftrightarrow AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

Chọn hệ trục Oxy sao cho $A,C \in Ox$, $B \in Oy$.

Giả sử trong hệ trục đó ta có: $A(a,0), C(c,0), B(0,b), D(m,n)$

$AB^2+CD^2=AD^2+BC^2$

$\Leftrightarrow a^2+b^2+(c-m)^2+n^2=(a-m)^2+n^2+c^2+b^2$

$\Leftrightarrow 2m(a-c)=0$ (*)

Do $A(a,0) \neq C(c,0) \Leftrightarrow a \neq c$

Vậy từ (*) suy ra m = 0 , hay D nằm trên trục tung.

Vậy (*)$\Leftrightarrow AC \perp BD$.

Bài 7. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho đường tr?n (C) : $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 9 = 0$ và điểm M(1; - 8).Viết phương trình đường thẳng d qua M sao cho d cắt (C) tại hai điểm A,B phân biệt mà diện tích tam giác ABI đạt giá trị lớn nhất. Với I là tâm của đường tròn (C).

Gợi ý

Đường tròn (C) có tâm I(- 2; 3) & bán kính R = 2.

Giả sử phương trình đường thẳng (d) : Ax + By - A + 8B = 0 với $A^2 + B^2 > 0$

Luôn có ΔBIA cân tại I với IA = IB = 2 ; $S_{\Delta BIA} = \dfrac{1}{2}$ IA.IB.sinAIB = 2sinAIB

$\Rightarrow S_{\Delta BIA} \leq 2$ Dấu = khi ΔAIB vuông cân tại I hay

$$d\left(I;(d)\right)=\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|11B-3A|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 7A^2-66BA+119B^2=0 \Leftrightarrow (A-7B)(7A-17B)=0$$

Vậy có hai đường thẳng d thoả mãn: 7x + y + 1 = 0 & 17x + 7y + 39 = 0.

Bài 8. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy cho elíp $(E): \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ và hai điểm $A(3;-2), B(-3;2)$. Tìm trên (E) điểm C có hoành độ và tung độ dương sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Gợi ý.

Ta có PT đường thẳng AB: 2x+3y=0

Gọi C(x;y) với x>0,y>0.Khi đó ta có $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$và diện tích tam giác ABC là

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C\to AB)=\frac{\sqrt{85}}{2\sqrt{13}}|2x+3y|=3\sqrt{\frac{85}{13}}\left|\frac{x}{3}+\frac{y}{4}\right|\leq 3\sqrt{\frac{85}{13}}\sqrt{2\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)}=3\sqrt{\frac{170}{13}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1 \\ \dfrac{x}{3}=\dfrac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$. Vậy $C\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2};\sqrt{2}\right)$

Bài 9. Cho $(E): \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ và $(d_1): mx-ny=0; (d_2): nx+my=0$, với $m^2+n^2\neq 0$.

1. Xác định giao điểm M, N của d_1 với (E) và giao điểm P, Q của d_2 với (E).
2. Tính theo m,n diện tích tứ giác MNPQ.
3. Tìm điều kiện đối với m,n để diện tích tứ giác MNPQ nhỏ nhất.

Gợi ý

1. Phương trình tham số của d_1, d_2 là: $(d_1): \begin{cases} x=nt \\ y=mt \end{cases}$; $(d_2): \begin{cases} x=-mt' \\ y=nt' \end{cases}$

Tọa độ của M, N là nghiệm của phương tình tương giao giữa (d_1) và (E).

$$\frac{nt^2}{9}+\frac{mt^2}{4}=1 \Leftrightarrow t=\pm\frac{6}{\sqrt{9m^2+4n^2}} \Rightarrow M\left(\frac{6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right),$$

$$N\left(\frac{-6n}{\sqrt{9m^2+4n^2}};\frac{-6m}{\sqrt{9m^2+4n^2}}\right).$$

Tọa độ của P, Q là nghiệm của phương tình tương giao giữa (d_2) và (E).

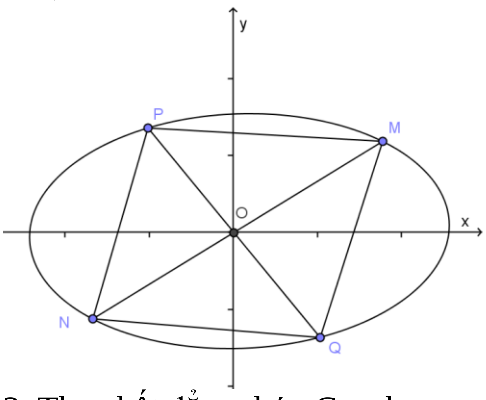
$$\frac{mt'^2}{9}+\frac{nt'^2}{4}=1 \Leftrightarrow t'=\pm\frac{6}{\sqrt{4m^2+9n^2}} \Rightarrow P\left(\frac{-6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right),$$

$$\Rightarrow Q\left(\frac{6m}{\sqrt{4m^2+9n^2}};\frac{-6n}{\sqrt{4m^2+9n^2}}\right).$$

2. Ta có: $MN \perp PQ$ tại trung điểm O của mỗi đường nên tứ giác MNPQ là hình thoi. Diện tích hình thoi MNPQ là:

$$S=\frac{1}{2}MN.PQ=2OM.OP=2\sqrt{x_M^2+y_M^2}.\sqrt{x_P^2+y_P^2}$$

$$=\frac{72(m^2+n^2)}{\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)}}$$



3. Theo bất đẳng thức Cauchy, ta có

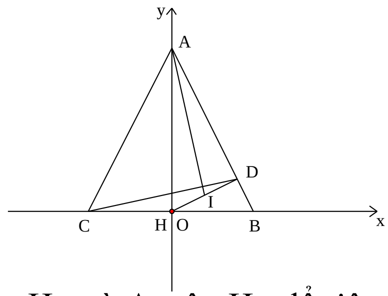
$$\sqrt{(9m^2+4n^2)(4m^2+9n^2)} \le \frac{(9m^2+4n^2)+(4m^2+9n^2)}{2}=\frac{13}{2}(m^2+n^2)$$

$$\Rightarrow S \ge \frac{72\left(m^2+n^2\right)}{\frac{13}{2}\left(m^2+n^2\right)} = \frac{144}{13} \Rightarrow \min S = \frac{144}{13}$$ đạt được khi và chỉ khi

$9m^2+4n^2=4m^2+9n^2 \Leftrightarrow m^2=n^2 \Leftrightarrow m=\pm n$.

Bài 10 : Cho tam giác ABC cân tại A. H là trung điểm BC, D là hình chiếu của H trên AB, I là trung điểm HD. Chứng minh rằng AI ⊥CD.

Gợi ý



Ta chọn hệ tọa độ Hxy sao cho hai điểm B, C trên Hx và A trên Hy để tiện cho việc tính toán ta đặt HB = HC = 1 và AH = b. Khi đó A(0 ; b), B(1;0) và C(-1;0)

đường thẳng AB có phương trình: $\frac{x}{1}+\frac{y}{b}=1 \Leftrightarrow bx+y-b=0$ do HD⊥ AB và đi qua gốc tọa độ H nên HD: $x-by=0$

Tọa độ D là nghiệm hệ :

$$\begin{cases} bx+y-b=0 \\ x-by=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{b^2}{1+b^2} \\ y=\dfrac{b}{1+b^2} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{b^2}{1+b^2};\frac{b}{1+b^2}\right)$$

Suy ra điểm I trung điểm của HD có tọa độ $I\left(\frac{b^2}{2\left(1+b^2\right)};\frac{b}{2\left(1+b^2\right)}\right)$ nên

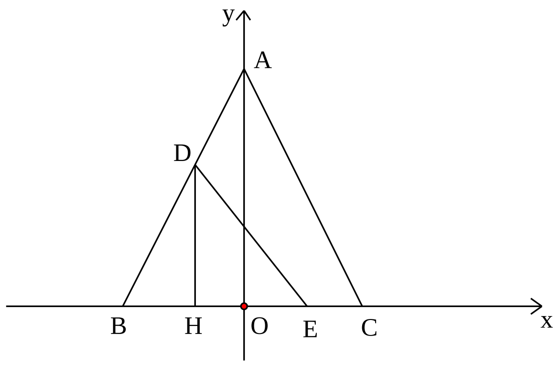
$\overrightarrow{AI}=I\left(\frac{b^2}{2\left(1+b^2\right)};-\frac{2b^3+b}{2\left(1+b^2\right)}\right)$; $\overrightarrow{CD}=\left(\frac{2b^2+1}{1+b^2};\frac{b}{1+b^2}\right)$ và do đó ta có:

$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2\left(1+b^2\right)^2}\left[b^2\left(2b^2+1\right)+b\left(-b-2b^3\right)\right]=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}\perp\overrightarrow{CD}$ đpcm.

Bài 11

Cho tam giác ABC cân tại A. Xét D trên cạnh AB và điểm E trên BC sao cho hình chiếu của DE trên BC có độ dài bằng $\frac{BC}{2}$. Chứng minh rằng đường thẳng vuông góc với DE tại E luôn đi qua một điểm cố định.

Gợi ý



Gọi O là trung điểm BC, chọn hệ tọa độ sao cho $A(0;a), B(-b;0), C(b;0)$

Khi đó các đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình

$$(AB):\ -\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1\ (AC):\ \frac{x}{b}+\frac{y}{a}=1$$

Gọi H là hình chiếu của D trên BC. Do $EH=\frac{BC}{2}$

nên $E\in[OC], H\in[OB]$.Vậy điểm có tọa độ E (x_0; 0).Gọi Δ là đường thẳng qua E vuông góc với DE. Suy ra Δ nhận $\overrightarrow{DE}=(b;-\frac{ax_0}{b})$ làm một vectơ pháp tuyến, vì vậy $\Delta: b^2x-ax_0y-b^2x_0=0$

Suy ra Δ luôn đi qua điểm $\left(0;-\frac{b^2}{a}\right)$ cố định.

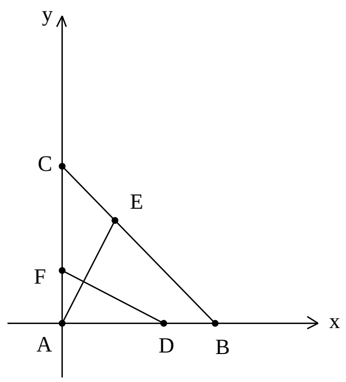
Bài 12. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Các điểm D, E, F lần lượt trên cạnh AB, BC, CA sao cho : $\frac{DA}{DB}=\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FA}$.

Chứng minh rằng : $AE\perp FD$ và $AE=FD$.

Gợi ý: Ta chọn hệ tọa độ Axy sao cho, AB và AC trên Ax, Ay

Không giảm tổng quát ta chọn : $AB=AC=1$

thế thì A(0;0), B(1;0) và C(0;1)



Đặt $\frac{DA}{DB}=\frac{EB}{EC}=\frac{FC}{FA}=m,\ m>0$

theo tính chất của tỉ lệ thức ta suy ra :

$$\frac{DA}{DA+DB}=\frac{m}{m+1},\quad \frac{FA}{FA+FC}=\frac{1}{m+1},\quad \frac{EB}{EB+EC}=\frac{m}{m+1}$$

Vậy: $DA=\frac{m}{m+1},\ FA=\frac{1}{m+1},\quad EH=\frac{m}{m+1},\ EK=\frac{1}{m+1}$

Nên : $D\left(\frac{m}{m+1};0\right),\ F\left(0;\frac{1}{m+1}\right),\ E\left(\frac{1}{m+1};\frac{m}{m+1}\right)$

Suy ra : $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{FD}=\frac{1}{m+1}.\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+1}.\left(-\frac{1}{m+1}\right)=0$

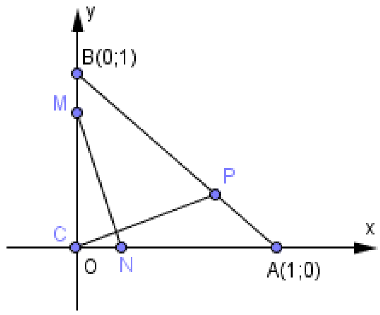
$$\overrightarrow{AE}^2=\overrightarrow{FD}^2=\left(\frac{1}{m+1}\right)^2+\left(\frac{m}{m+1}\right)^2$$

Chứng tỏ : $AE\perp FD$ va $AE=FD$ (điều phải chứng minh)

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các Cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $\frac{MB}{MC}=\frac{NC}{NA}=\frac{PA}{PB}$.

Chứng minh rằng $CP\perp MN$ và CP = MN

Gợi ý



Chọn hệ trục Oxy sao cho $O \equiv C$, tia Ox $\equiv$ CA và tia Oy$\equiv$ CB
Ta có toạ độ các điểm C(0; 0) , A(1; 0) , B(0; 1).

Từ giả thiết ta đặt $\frac{MB}{MC} = \frac{NC}{NA} = \frac{PA}{PB} = k$

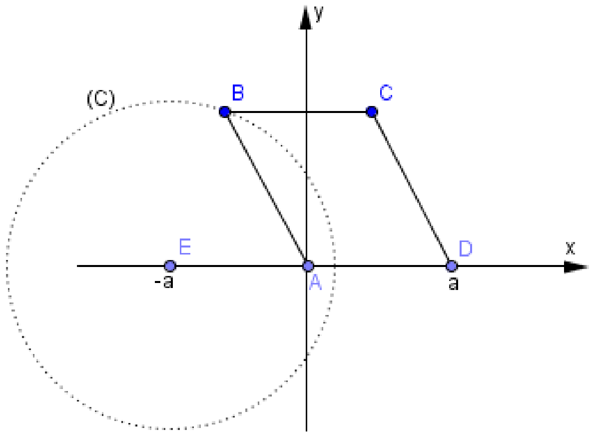
Do đó $\begin{cases} \overrightarrow{CM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{CN} = \frac{k}{1+k}\overrightarrow{CA} \\ \overrightarrow{CP} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{CB} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(0;\frac{1}{1+k}\right) \\ N\left(\frac{k}{1+k};0\right) \\ P\left(\frac{1}{1+k};\frac{k}{1+k}\right) \end{cases}$

Từ đó $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{CP} = \frac{k}{(1+k)^2} - \frac{k}{(1+k)^2} = 0 \Rightarrow CP \perp MN$

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{k^2+1}{(1+k)^2} = \overrightarrow{CP}^2$$

Bài 14. Hình bình hành $ABCD$ thay đổi trong đó A và D cố định thoả: $\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{BA}$.

Tìm tập hợp điểm B và C.



Gợi ý.
Trong mặt phẳng Oxy, chọn $A \equiv O(0;0)$; $D(a;0)$ với $AD = a$ (không đổi)
Theo giả thiết hình bình hành $ABCD$ thay đổi nên lấy $B(x;y)$ và $C(x+a;y)$ bất kỳ với điều kiện $y \neq 0$.

Khi đó: $\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{BA} \Leftrightarrow AC.BA = AD.BD \Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2+y^2}.\sqrt{x^2+y^2} = a.\sqrt{(x-a)^2+y^2}$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2+2ax+a^2).(x^2+y^2) = a^2.(x^2+y^2-2ax+a^2)$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)^2 + 2ax(x^2+y^2) + 2a^3x - a^4 = 0 \qquad (*)$$

((*) là phương trình bậc hai với ẩn (x^2+y^2))

Tính $\Delta' = (ax)^2 - (2a^3x - a^4) = (a^2 - ax)^2$

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+y^2=-ax+(a^2-ax) \\ x^2+y^2=-ax-(a^2-ax) \quad (\text{vô lý}) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow x^2+2ax+y^2=a^2$$

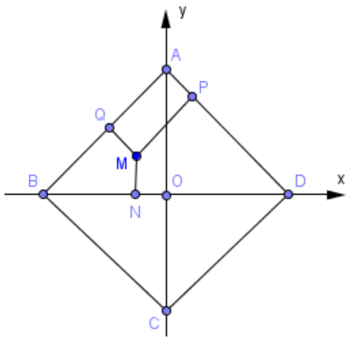
$$\Leftrightarrow (x+a)^2+y^2=2a^2$$

Vậy tập hợp điểm B là đường tròn (C) có tâm $I(-a;0)$, bán kính $R_B=a\sqrt{2}$, bỏ hai điểm $\left(-a\left(\sqrt{2}+1\right);0\right)$ và $\left(a\left(\sqrt{2}-1\right);0\right)$

Do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành, ta có $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Vậy tập hợp điểm C là đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép tịnh tiến theo $\overrightarrow{AD}$. Đường tròn (C') có tâm $A\equiv O(0;0)$, bán kính $R_C=a\sqrt{2}$, bỏ hai điểm $\left(-a\sqrt{2};0\right)$ và $\left(a\sqrt{2};0\right)$.

Bài 15. Cho hình vuông cố định. Tìm tập hợp những điểm M trong hình vuông đó và thỏa mãn điều kiện: Tích hai khoảng cách từ điểm M đến hai cạnh của hình vuông cùng xuất phát từ một đỉnh bằng bình phương khoảng cách từ điểm M đến đường chéo của hình vuông không đi qua đỉnh đó.

Gợi ý.



Không giảm tính tổng quát, xét hình vuông có cạnh $\sqrt{2}$.

Đặt hình vuông ABCD lên mặt phẳng có hệ trục tọa độ Oxy sao cho $A(0;1), B(-1;0), C(0;-1), D(1;0)$. Gọi M(x;y) là điểm ở trong hình vuông ABCD, hạ MN,MP, MQ lần lượt vuông góc với BD, DA, AB tại N, P, Q.

Do đó: $MP.MQ = MN^2$ (1) (xét 2 cạnh hình vuông phát xuất từ đỉnh A)

AB: x – y + 1 = 0, AD: x + y – 1 = 0.

(1) $\Leftrightarrow \dfrac{|x-y+1|}{\sqrt{2}}.\dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{2}}=|y|^2 \Leftrightarrow |x^2-(y-1)^2|=2y^2$

M(x;y) ở trong hình vuông nên x – y + 1 > 0, và x + y – 1 < 0.

Do đó: $x^2-(y-1)^2=(x-y+1)(x+y-1)<0$ nên (1)

$\Leftrightarrow x^2-(y-1)^2=-2y^2 \Leftrightarrow x^2+(y+1)^2=2$

Vậy tập hợp các điểm M là cung BD, cung ¼ đường tròn C, bán kính R = $\sqrt{2}$.

Từ kết quả trên ta kết luận: Tập hợp các điểm M là 4 cung ¼ đường tròn tâm là các đỉnh của hình vuông và có bán kính bằng cạnh của hình vuông.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn: TOÁN; Khối A và khối A1
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx - 1 \quad (1)$, với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để hàm số (1) nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 2 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt[4]{x-1} - \sqrt{y^4+2} = y \\ x^2 + 2x(y-1) + y^2 - 6y + 1 = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 4 (1,0 *điểm*). Tính tích phân $I = \int\limits_1^2 \frac{x^2-1}{x^2} \ln x \, dx$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A, $\widehat{ABC} = 30^\circ$, SBC là tam giác đều cạnh a và mặt bên SBC vuông góc với đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABC$ và khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB).

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn điều kiện $(a+c)(b+c) = 4c^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{32a^3}{(b+3c)^3} + \frac{32b^3}{(a+3c)^3} - \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm C thuộc đường thẳng $d: 2x + y + 5 = 0$ và $A(-4; 8)$. Gọi M là điểm đối xứng của B qua C, N là hình chiếu vuông góc của B trên đường thẳng MD. Tìm tọa độ các điểm B và C, biết rằng $N(5; -4)$.

Câu 8.a (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-6}{-3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1}$ và điểm $A(1; 7; 3)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với Δ. Tìm tọa độ điểm M thuộc Δ sao cho $AM = 2\sqrt{30}$.

Câu 9.a (1,0 *điểm*). Gọi S là tập hợp tất cả các số tự nhiên gồm ba chữ số phân biệt được chọn từ các chữ số 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7. Xác định số phần tử của S. Chọn ngẫu nhiên một số từ S, tính xác suất để số được chọn là số chẵn.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $\Delta: x - y = 0$. Đường tròn (C) có bán kính $R = \sqrt{10}$ cắt Δ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 4\sqrt{2}$. Tiếp tuyến của (C) tại A và B cắt nhau tại một điểm thuộc tia Oy. Viết phương trình đường tròn (C).

Câu 8.b (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x + 3y + z - 11 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 8 = 0$. Chứng minh (P) tiếp xúc với (S). Tìm tọa độ tiếp điểm của (P) và (S).

Câu 9.b (1,0 *điểm*). Cho số phức $z = 1 + \sqrt{3}\,i$. Viết dạng lượng giác của z. Tìm phần thực và phần ảo của số phức $w = (1+i)z^5$.

———**Hết**———

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: ....; Số báo danh: ....

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2013
Môn: TOÁN; Khối B
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx \quad (1)$, với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = -1$.

b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x + 2$.

Câu 2 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$.

Câu 3 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^2 + y^2 - 3xy + 3x - 2y + 1 = 0 \\ 4x^2 - y^2 + x + 4 = \sqrt{2x+y} + \sqrt{x+4y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 4 (1,0 *điểm*). Tính tích phân $I = \int\limits_0^1 x\sqrt{2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD).

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho a, b, c là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{4}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 4}} - \frac{9}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}.$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thang cân $ABCD$ có hai đường chéo vuông góc với nhau và $AD = 3BC$. Đường thẳng BD có phương trình $x + 2y - 6 = 0$ và tam giác ABD có trực tâm là $H(-3; 2)$. Tìm tọa độ các đỉnh C và D.

Câu 8.a (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; 5; 0)$ và mặt phẳng $(P)\colon 2x + 3y - z - 7 = 0$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A và vuông góc với (P). Tìm tọa độ điểm đối xứng của A qua (P).

Câu 9.a (1,0 *điểm*). Có hai chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 viên bi đỏ và 3 viên bi trắng, hộp thứ hai chứa 2 viên bi đỏ và 4 viên bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp ra 1 viên bi, tính xác suất để 2 viên bi được lấy ra có cùng màu.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có chân đường cao hạ từ đỉnh A là $H\left(\frac{17}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, chân đường phân giác trong của góc A là $D(5; 3)$ và trung điểm của cạnh AB là $M(0; 1)$. Tìm tọa độ đỉnh C.

Câu 8.b (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; -1; 1)$, $B(-1; 2; 3)$ và đường thẳng $\Delta : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$. Viết phương trình đường thẳng đi qua A, vuông góc với hai đường thẳng AB và Δ.

Câu 9.b (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2 + 2y = 4x - 1 \\ 2\log_3(x-1) - \log_{\sqrt{3}}(y+1) = 0. \end{cases}$

———**Hết**———

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: . . . .; Số báo danh: . . . .

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2012
Môn: TOÁN; Khối A và khối A1
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ (1), với m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 0$.

b) Tìm m để đồ thị của hàm số (1) có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông.

Câu 2 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x = 2\cos x - 1$.

Câu 3 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y \\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Câu 4 (1,0 *điểm*). Tính tích phân $I = \displaystyle\int_1^3 \frac{1 + \ln(x+1)}{x^2}\,dx$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) là điểm H thuộc cạnh AB sao cho $HA = 2HB$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 60°. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC theo a.

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho các số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = 3^{|x-y|} + 3^{|y-z|} + 3^{|z-x|} - \sqrt{6x^2 + 6y^2 + 6z^2}.$$

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $CN = 2ND$. Giả sử $M\left(\frac{11}{2}; \frac{1}{2}\right)$ và đường thẳng AN có phương trình $2x - y - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm A.

Câu 8.a (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$ và điểm $I(0;0;3)$. Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm I và cắt d tại hai điểm A, B sao cho tam giác IAB vuông tại I.

Câu 9.a (1,0 *điểm*). Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$. Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Niu-tơn của $\left(\frac{nx^2}{14} - \frac{1}{x}\right)^n$, $x \neq 0$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 8$. Viết phương trình chính tắc của elip (E), biết rằng (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và (E) cắt (C) tại bốn điểm tạo thành bốn đỉnh của một hình vuông.

Câu 8.b (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$, mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 5 = 0$ và điểm $A(1;-1;2)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt d và (P) lần lượt tại M và N sao cho A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu 9.b (1,0 *điểm*). Cho số phức z thỏa mãn $\frac{5(\bar{z} + i)}{z+1} = 2 - i$. Tính môđun của số phức $w = 1 + z + z^2$.

---------- **HẾT** ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..; Số báo danh: ....

.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2012
Môn: TOÁN; Khối B
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
b) Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Câu 2 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $2(\cos x + \sqrt{3}\sin x)\cos x = \cos x - \sqrt{3}\sin x + 1$.

Câu 3 (1,0 *điểm*). Giải bất phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$.

Câu 4 (1,0 *điểm*). Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2}\,dx$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a, AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC. Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH). Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a.

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho các đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 4$, (C_2): $x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d: x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2), tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d.

Câu 8.a (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d.

Câu 9.a (1,0 *điểm*). Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox.

Câu 8.b (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;3), M(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM.

Câu 9.b (1,0 *điểm*). Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2.

---------- **HẾT** ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:.. ; Số báo danh:.. .

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2012
Môn: TOÁN; Khối D
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu 1 (2,0 *điểm*). Cho hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2(3m^2-1)x+\frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m=1$.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1x_2+2(x_1+x_2)=1$.

Câu 2 (1,0 *điểm*). Giải phương trình $\sin 3x+\cos 3x-\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos 2x$.

Câu 3 (1,0 *điểm*). Giải hệ phương trình $\begin{cases} xy+x-2=0 \\ 2x^3-x^2y+x^2+y^2-2xy-y=0 \end{cases}$ $(x, y\in \mathbb{R})$.

Câu 4 (1,0 *điểm*). Tính tích phân $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} x(1+\sin 2x)\mathrm{d}x$.

Câu 5 (1,0 *điểm*). Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C=a$. Tính thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a.

Câu 6 (1,0 *điểm*). Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x-4)^2+(y-4)^2+2xy\le 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=x^3+y^3+3(xy-1)(x+y-2)$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x+3y=0$ và $x-y+4=0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M\left(-\frac{1}{3};1\right)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật $ABCD$.

Câu 8.a (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P): $2x+y-2z+10=0$ và điểm $I(2;1;3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I và cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Câu 9.a (1,0 *điểm*). Cho số phức z thỏa mãn $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Tìm môđun của số phức $w=z+1+i$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 *điểm*). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x-y+3=0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d, cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB=CD=2$.

Câu 8.b (1,0 *điểm*). Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(2;-1;0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M.

Câu 9.b (1,0 *điểm*). Giải phương trình $z^2+3(1+i)z+5i=0$ trên tập hợp các số phức.

---------- **HẾT** ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:...; Số báo danh: ....

.

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2011
Môn: TOÁN; Khối: A
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 *điểm*)

Câu I (2,0 *điểm*) Cho hàm số $y = \dfrac{-x+1}{2x-1}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.
2. Chứng minh rằng với mọi m đường thẳng $y = x + m$ luôn cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B. Gọi k_1, k_2 lần lượt là hệ số góc của các tiếp tuyến với (C) tại A và B. Tìm m để tổng $k_1 + k_2$ đạt giá trị lớn nhất.

Câu II (2,0 *điểm*)

1. Giải phương trình $\dfrac{1+\sin 2x+\cos 2x}{1+\cot^2 x} = \sqrt{2}\sin x\sin 2x.$
2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0 \\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

Câu III (1,0 *điểm*) Tính tích phân $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}\,dx.$

Câu IV (1,0 *điểm*) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng qua SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp $S.BCNM$ và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Câu V (1,0 *điểm*) Cho x, y, z là ba số thực thuộc đoạn $[1; 4]$ và $x \ge y$, $x \ge z$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \dfrac{x}{2x+3y} + \dfrac{y}{y+z} + \dfrac{z}{z+x}$.

PHẦN RIÊNG (3,0 *điểm*): *Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)*

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 *điểm*)

1. Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho đường thẳng Δ: $x + y + 2 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$. Gọi I là tâm của (C), M là điểm thuộc Δ. Qua M kẻ các tiếp tuyến MA và MB đến (C) (A và B là các tiếp điểm). Tìm tọa độ điểm M, biết tứ giác $MAIB$ có diện tích bằng 10.
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 0; 1)$, $B(0; -2; 3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 4 = 0$. Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA = MB = 3$.

Câu VII.a (1,0 *điểm*) Tìm tất cả các số phức z, biết: $z^2 = |z|^2 + \bar{z}$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 *điểm*)

1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho elip (E): $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Tìm tọa độ các điểm A và B thuộc (E), có hoành độ dương sao cho tam giác OAB cân tại O và có diện tích lớn nhất.
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 4z = 0$ và điểm $A(4; 4; 0)$. Viết phương trình mặt phẳng (OAB), biết điểm B thuộc (S) và tam giác OAB đều.

Câu VII.b (1,0 *điểm*) Tính môđun của số phức z, biết: $(2z - 1)(1 + i) + (\bar{z} + 1)(1 - i) = 2 - 2i$.

----------- Hết ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..; Số báo danh:.................................

BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2009
Môn thi: TOÁN; Khối: A
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề.

PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm):

Câu I (2,0 điểm)

Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+3}$ (1).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1).
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết tiếp tuyến đó cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác OAB cân tại gốc toạ độ O.

Câu II (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\dfrac{(1-2\sin x)\cos x}{(1+2\sin x)(1-\sin x)}=\sqrt{3}$.
2. Giải phương trình $2\sqrt[3]{3x-2}+3\sqrt{6-5x}-8=0$ $(x\in\mathbb{R})$.

Câu III (1,0 điểm)

Tính tích phân $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^3 x-1\right)\cos^2 x\,dx$.

Câu IV (1,0 điểm)

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D; $AB=AD=2a$, $CD=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng 60°. Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a.

Câu V (1,0 điểm)

Chứng minh rằng với mọi số thực dương x, y, z thoả mãn $x(x+y+z)=3yz$, ta có:

$$(x+y)^3+(x+z)^3+3(x+y)(x+z)(y+z)\le 5(y+z)^3.$$

PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần (phần A hoặc B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho hình chữ nhật $ABCD$ có điểm $I(6;2)$ là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Điểm $M(1;5)$ thuộc đường thẳng AB và trung điểm E của cạnh CD thuộc đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Viết phương trình đường thẳng AB.
2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y-z-4=0$ và mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2x-4y-6z-11=0$. Chứng minh rằng mặt phẳng (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định toạ độ tâm và tính bán kính của đường tròn đó.

Câu VII.a (1,0 điểm)

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ toạ độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x+4y+6=0$ và đường thẳng $\Delta: x+my-2m+3=0$, với m là tham số thực. Gọi I là tâm của đường tròn (C). Tìm m để Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho diện tích tam giác IAB lớn nhất.
2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+2z-1=0$ và hai đường thẳng $\Delta_1: \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+9}{6}$, $\Delta_2: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2}$. Xác định toạ độ điểm M thuộc đường thẳng Δ_1 sao cho khoảng cách từ M đến đường thẳng Δ_2 và khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

Câu VII.b (1,0 điểm)

Giải hệ phương trình $\begin{cases}\log_2\left(x^2+y^2\right)=1+\log_2(xy)\\ 3^{x^2-xy+y^2}=81\end{cases}$ $(x, y\in\mathbb{R})$.

---------- Hết ----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:..; Số báo danh...............................