

Chuyên đề: **PHƯƠNG PHÁP TAM GIÁC BẰNG NHAU**

Môn: Hình học

Lớp: 7

I. Mục tiêu

Sau khi học xong chuyên đề học sinh có khả năng:

1. Biết vận dụng các trường hợp bằng nhau của tam giác để chứng minh hai tam giác bằng nhau; Nắm được các bước chứng minh hai đoạn thẳng hay hai góc bằng nhau; Biết vẽ thêm đường phụ để tạo ra hai tam giác bằng nhau.
2. Hiểu các bước phân tích bài toán, tìm hướng chứng minh
3. Có kĩ năng vận dụng các kiến thức được trang bị để giải toán.

II. Các tài liệu hỗ trợ:

- Bài tập nâng cao và một số chuyên đề toán 7
- Hình học nâng cao THCS
- Vẽ thêm yếu tố phụ để giải các bài toán hình học 7
- Bồi dưỡng toán 7
- Nâng cao và phát triển toán 7
- ...

III. Nội dung

1. Kiến thức cần nhớ

Ta đã biết nếu hai tam giác bằng nhau thì suy ra được các cặp cạnh tương ứng bằng nhau, các cặp góc tương ứng bằng nhau. Đó là lợi ích của việc chứng minh hai tam giác bằng nhau.

*. Các trường hợp bằng nhau của tam giác

a. Trường hợp cạnh - cạnh - cạnh: Nếu ba cạnh của tam giác này bằng ba cạnh tương ứng của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

b. Trường hợp cạnh - góc - cạnh: Nếu hai cạnh và một góc xen giữa của tam giác này bằng hai cạnh và góc xen giữa của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau

c. Trường hợp góc - cạnh - góc: Nếu một cạnh và hai góc kề của tam giác này bằng một cạnh và hai góc kề của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

*. Muốn chứng minh hai đoạn thẳng (hay hai góc) bằng nhau ta thường làm theo các bước sau:

- Xét xem hai đoạn thẳng (hay hai góc) là hai cạnh (hay hai góc) thuộc hai tam giác nào.

- Chứng minh hai tam giác đó bằng nhau

- Suy ra hai cạnh (hay hai góc) tương ứng bằng nhau.

*. Để tạo ra được hai tam giác bằng nhau, có thể ta phải vẽ thêm đường phụ bằng nhiều cách:

- Nối hai cạnh có sẵn trên hình để tạo ra một cạnh chung của hai tam giác.

- Trên một tia cho trước, đặt một đoạn bằng một đoạn thẳng khác.
- Từ một điểm cho trước, vẽ một đường thẳng song song với một đoạn thẳng.
- Từ một điểm cho trước, vẽ một đường thẳng vuông góc với một đoạn thẳng.

Ngoài ra còn nhiều cách khác ta có thể tích lũy được kinh nghiệm khi giải nhiều bài toán.

2. Các ví dụ:

2.1. Ví dụ 1 (BTNC & MSCĐ/123)

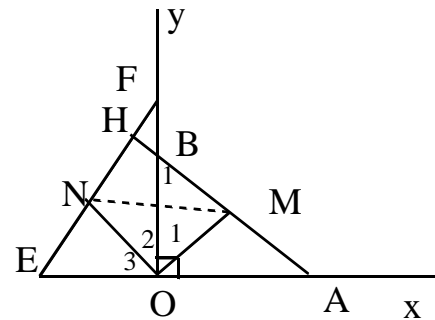
Cho góc vuông xOy , điểm A trên tia Ox , điểm B trên tia Oy . Lấy điểm E trên tia đối của tia Ox , điểm F trên tia Oy sao cho $OE = OB$, $OF = OA$.

- Chứng minh $AB = EF$, $AB \perp EF$.
- Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và EF . Chứng minh rằng tam giác OMN vuông cân.

Giải:

GT $\begin{cases} xOy = 90^\circ; A \in Ox, B \in Oy \\ OE = OB, OF = OA \\ M \in AB: MA = MB \\ N \in EF: NE = NF \end{cases}$

KL $\begin{cases} a, AB = EF, AB \perp EF \\ b. \triangle OMN \text{ vuông cân} \end{cases}$



Chứng minh

a. Xét $\triangle AOB$ và $\triangle FOE$ có:

$\begin{cases} OA = OF \text{ (GT)} \\ \angle AOB = \angle FOE = 90^\circ \\ OB = OE \text{ (GT)} \end{cases} \Rightarrow \triangle AOB \text{ và } \triangle FOE \text{ (C.G.C)}$
 $\Rightarrow AB = EF$ (cạnh tương ứng)

$\angle E = \angle B$ (1) (góc tương ứng)

Xét $\triangle FOE$: $\angle F = 90^\circ \Rightarrow \angle E + \angle F = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle E + \angle B = 90^\circ \Rightarrow \angle EAH = 90^\circ \Rightarrow EH \perp HA$ hay $AB \perp EF$.

b. Ta có: $\begin{cases} BM = \frac{1}{2} AB \text{ (M là trung điểm của AB)} \\ EN = \frac{1}{2} EF \text{ (N là trung điểm của EF)} \\ \text{Mà } AB = EF \end{cases} \Rightarrow BM = EN$

Mặt khác: $\begin{cases} \triangle FOE: \angle F = 90^\circ \Rightarrow \angle E + \angle F = 90^\circ \\ \triangle OAB: \angle O = 90^\circ \Rightarrow \angle A + \angle B = 90^\circ \\ \text{Mà } \angle E = \angle B \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \angle F = \angle A$

Xét $\triangle BOM$ và $\triangle EON$ có:

$\begin{cases} OB = OE \text{ (gt)} \\ \angle B_1 = \angle E \text{ (cmt)} \\ BM = EN \text{ (cmt)} \end{cases} \Rightarrow \triangle BOM = \triangle EON \text{ (c.g.c)}$
 $\Rightarrow OM = ON$ (*)

Và $\angle 1 = \angle 2$

Mà $\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$ nên $\angle 1 + \angle 3 = 90^\circ \Rightarrow \angle MON = 90^\circ$ (**)

Từ (*) và(**) \Rightarrow ∇ OMN vuông cân

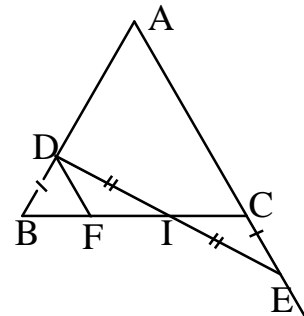
2.2. VD2(BT26/VTYTP/62):

Cho ∇ ABC cân đỉnh A. Trên cạnh AB lấy điểm D, trên tia đối của tia CA lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Nối D với E. Gọi I là trung điểm của DE.

Chứng minh ba điểm B, I, C thẳng hàng.

Giải

GT ∇ ABC: $AB = AC$ $D \in AB, E \in AC: BD=CE$ $I \in DE: ID = IE$	
KL B, I, C thẳng hàng	



* Phân tích: B, I, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \angle BIE + \angle EIC = 180^\circ$ } \Rightarrow Cần c/m $\angle BID = \angle EIC$
 Mà $\angle BID + \angle BIE = 180$ }

\Rightarrow Cần tạo ra một điểm F trên cạnh BC: ∇ EIC = ∇ DIF

Chứng minh

Kẻ $DF \parallel AC$ ($F \in BC$) $\Rightarrow \angle DFB = \angle ACB$ (hai góc đồng vị) } $\Rightarrow \angle DFB = \angle ABC$
 Mà ∇ ABC cân tại A $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$ (t/c)
 $\Rightarrow \nabla$ DFB cân tại D $\Rightarrow DB = DF$

Xét ∇ DIF và ∇ EIC có:

$ID = IE$ (gt)
 $\left. \begin{aligned} \angle FDI &= \angle CEI \text{ (SLT, } DF \parallel AC) \\ DF &= EC (=BD) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nabla$ DIF = ∇ EIC (c.g.c)

$\Rightarrow \angle DIF = \angle EIC$ (hai góc tương ứng) (1)

Vì $I \in DE$ nên $\angle DIF + \angle FIE = 180^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle EIC + \angle FIE = 180^\circ$ hay $\angle EIC + \angle EIB = 180^\circ \Rightarrow B, I, C$ thẳng hàng.

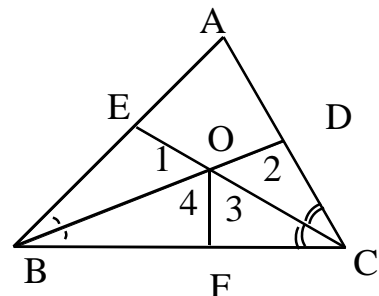
2.3. VD 3:(BTNC&MSCD/123)

Cho ∇ ABC, $\angle A = 60^\circ$. Phân giác BD, CE cắt nhau tại O. Chứng minh rằng :

- a. ∇ DOE cân
- b. $BE + CD = BC$.

Giải

∇ ABC, $\angle A = 60^\circ$ BD: Phân giác $\angle B$ ($D \in AC$) GT CE: Phân giác $\angle C$ ($E \in AB$) $BD \cap CE = \{O\}$	
KL a. ∇ DOE cân b. $BE + CD = BC$.	



Chứng minh

Ta có: $\triangle ABC$: $\hat{B} + \hat{C} = 180^\circ - \hat{A} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (Định lý tổng ba góc của một tam giác)

Mà $\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}}{2}$ (BD là phân giác \hat{B})

$\hat{C}_1 = \frac{\hat{C}}{2}$ (CE là phân giác \hat{C})

Nên $\hat{B}_1 + \hat{C}_1 = \frac{\hat{B} + \hat{C}}{2} = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

$\triangle OBC$: $\angle BOC = 180^\circ - (\hat{B}_1 + \hat{C}_1) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ (Định lý tổng ba góc của một tam giác)

Mặt khác: $\angle BOC + \hat{D}_1 = 180^\circ$ (kề bù)

$\angle BOC + \hat{D}_2 = 180^\circ$ (kề bù)

Vẽ phân giác OF của $\angle BOC$ ($F \in BC$) $\Rightarrow \hat{D}_3 = \hat{D}_4 = \frac{\angle BOC}{2} = 60^\circ$

Do đó: $\hat{D}_1 = \hat{D}_2 = \hat{D}_3 = \hat{D}_4 = 60^\circ$

Xét $\triangle BOE$ và $\triangle BOF$ có:

$\hat{B}_2 = \hat{B}_1$ (BD là phân giác \hat{B})

BO cạnh chung

$\hat{D}_1 = \hat{D}_4 = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle BOE = \triangle BOF$ (g.c.g)

$\Rightarrow OE = OF$ (1) (hai cạnh tương ứng)

Và $BE = BF$

c/m tương tự $\triangle COD = \triangle COF$ (g.c.g) $\Rightarrow OD = OF$ (2) (hai cạnh tương ứng)

và $CD = EF$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OE = OD \Rightarrow \triangle DOE$ cân

b. Ta có $BE = BF$

$CD = CF$ (cmt)

$\Rightarrow BE + CD = BF + FC = BC$

Vậy: $BE + DC = BC$

* Nhận xét:

- VD trên cho ta thêm một cách vẽ đường phụ: Vẽ phân giác OF của $\angle BOC$. Khi đó OF là một đoạn thẳng trung gian để so sánh OD với OE.

- Ta cũng có thể vẽ thêm đường phụ bằng cách khác: Trên BC lấy điểm F: $BF = BE$. Do đó cần c/m $\triangle BOE = \triangle BOF$ (g.c.g) và $\triangle COD = \triangle COF$ (g.c.g).

3. Bài tập

3.1. Bài tập 1: 62- BTNC & MSCĐ/117)

Tam giác ABC và tam giác A'B'C' có $AB = A'B'$, $AC = A'C'$. Hai góc A và A' bù nhau. Vẽ trung tuyến AM rồi kéo dài một đoạn $MD = MA$.

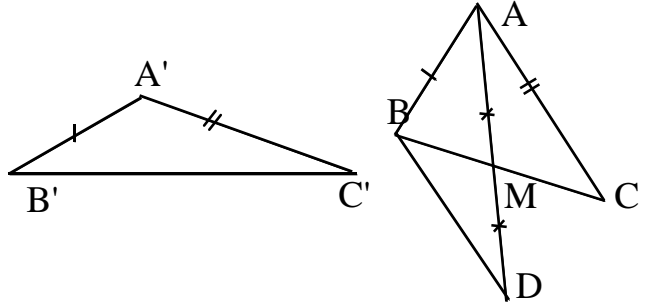
Chứng minh: a. $\angle ABD = \hat{A}$

b. $AM = \frac{1}{2} B'C'$

Giải

GT $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:
 $AB=A'B', AC=A'C'$
 $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$
 $M \in BC: MB=MC$
 $D \in AM: MD=MA$

KL a. $\hat{A}BD = \hat{A}'$
 b. $AM = \frac{1}{2} B'C'$



Chứng minh

Xét $\triangle AMC$ và $\triangle DMB$ có:

$AM = MD$ (gt)
 $\hat{AMC} = \hat{DMB}$ (đối đỉnh)
 $MC = MB$ (gt)

$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle DMB$ (c.g.c)
 $\Rightarrow AC = BD$ (hai cạnh tương ứng)

$\hat{A}' = \hat{B}$ (hai góc tương ứng) $\Rightarrow AC \parallel BD$ (vì có cặp góc SLT bằng nhau)
 $\Rightarrow \hat{BAC} + \hat{ABD} = 180^\circ$ (hai góc trong cùng phía)

Mà $\hat{BAC} + \hat{A}' = 180^\circ$ (gt)
 $\Rightarrow \hat{ABD} = \hat{A}'$

b. Xét $\triangle ABD$ và $\triangle B'A'C'$ có:

$AB = A'B'$ (gt)
 $\hat{ABD} = \hat{A}'$ (cmt)
 $BD = A'C' (=AC)$

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle B'A'C'$ (c.g.c)
 $\Rightarrow AD = B'C'$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AM = \frac{1}{2} AD$ (gt)
 $\Rightarrow AM = \frac{1}{2} B'C'$

* Nhận xét: Hai tam giác có hai cặp cạnh bằng nhau và một cặp góc xen giữa chúng bù nhau thì trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng một nửa cạnh thứ ba của tam giác kia.

3.2. BT2: 63- BTNC&MSCĐ/117)

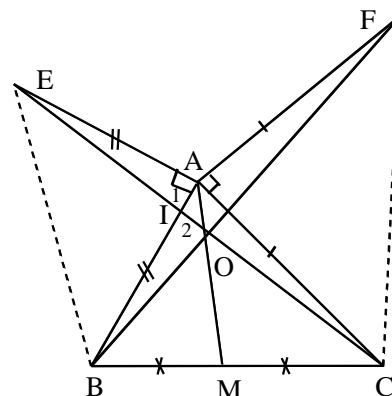
Cho tam giác ABC. vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF.

Chứng minh: a. $BF = CE$ và $BF \perp CE$

b. Gọi M là trung điểm của BC. CMR: $AM = \frac{1}{2} EF$

Giải

∇ABC $\nabla ABE: \hat{A} = 90^\circ, AB = AE$ GT $\nabla ACF: \hat{A} = 90^\circ, AC = AF$ $M \in BC: MB = MC$	<hr style="width: 100%;"/> KL a. $BF = CE$ và $BF \perp CE$ b. $AM = \frac{1}{2} EF$
--	---



Chứng minh

a. Ta có: $\hat{EAC} = \hat{EAB} + \hat{BAC} = 90^\circ + \hat{BAC}$

$$\hat{BAF} = \hat{BAC} + \hat{CAF} = 90^\circ + \hat{BAC}$$

$$\Rightarrow \hat{EAC} = \hat{BAF}$$

Xét ∇ABF và ∇AEC có:

$$\left. \begin{array}{l} AB = AE \text{ (gt)} \\ \hat{BAF} = \hat{EAC} \text{ (cmt)} \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla ABF = \nabla AEC \text{ (c.g.c)}$$

$$AF = AC \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow BF = CE$ (hai cạnh tương ứng)

và $\hat{B}_1 = \hat{E}_1$ (hai góc tương ứng) (1)

Gọi O và I lần lượt là giao điểm của CE với BF và AB.

Xét ∇AEI vuông tại A có $\hat{E}_1 + \hat{I}_1 = 90^\circ$ (2)

Và $\hat{I}_1 = \hat{I}_2$ (đối đỉnh) (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{I}_2 = 90^\circ \Rightarrow \hat{BOI} = 90^\circ \Rightarrow BF \perp CE$

b. Ta có: $\hat{EAB} + \hat{BAC} + \hat{CAF} + \hat{FAE} = 360^\circ$

$$\Rightarrow \hat{BAC} + \hat{FAE} = 360^\circ - (\hat{EAB} + \hat{CAF}) = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ) = 180^\circ$$

Ta thấy: ∇ABC và ∇EAF có hai cặp cạnh bằng nhau và một cặp góc xen giữa

chúng bù nhau nên trung tuyến $AM = \frac{1}{2} EF$

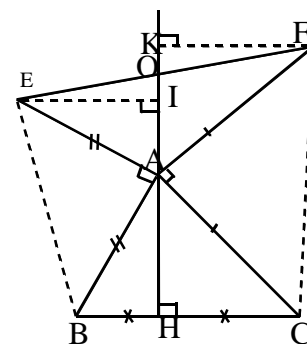
3.3. BT3(HHNC/56):

Cho $\triangle ABC$.vẽ ra ngoài tam giác này các tam giác vuông cân tại A là ABE và ACF. Vẽ AH vuông góc với BC. Đường thẳng AH giao EF tại O.

CMR: O là trung điểm của EF.

Giải

	$\triangle ABC$
	$\triangle ABE: \hat{A} = 90^\circ, AB = AE$
GT	$\triangle ACF: \hat{A} = 90^\circ, AC = AF$
	$AH \perp BC (H \in BC)$
	$AH \cap EF = \{O\}$
KL	O là trung điểm của EF.



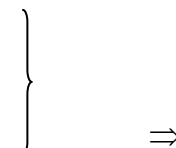
Chứng minh

Kẻ $EI \perp AH, FK \perp AH (I, K \in AH)$

Xét $\triangle AEI$ và $\triangle ABH$ có:

$$\hat{I} = \hat{A} = 90^\circ$$

$$AE = AB \text{ (gt)}$$



$\angle EAI = \angle BAH$ (cặp góc có cạnh tương ứng vuông góc cùng nhọn)

$\Rightarrow \triangle AEI = \triangle ABH$ (cạnh huyền- góc nhọn)

$\Rightarrow EI = AH$ (hai cạnh tương ứng)

Tương tự: $\triangle AFK = \triangle CAH$ (cạnh huyền- góc nhọn)

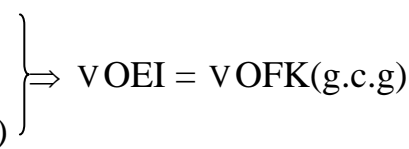
$\Rightarrow FK = AH$ (hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle OEI$ và $\triangle OFK$ có:

$$\hat{I} = \hat{K} = 90^\circ$$

$$EI = FK (=AH)$$

$$\angle KFO = \angle IEO \text{ (SLT, } EI // FK)$$



$\Rightarrow OE = OF$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $O \in EF$ (gt)

$\Rightarrow O$ là trung điểm của EF.

3.4. BT4(88/ BDT7/101)

Cho $\triangle ABC$ có $\hat{A} = 60^\circ$. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều ABM và CAN.

a. CMR: Ba điểm A, M, N thẳng hàng

b. c/m $BN = CM$

c. Gọi O là giao điểm của BN và CM . Tính $\angle BOC$.

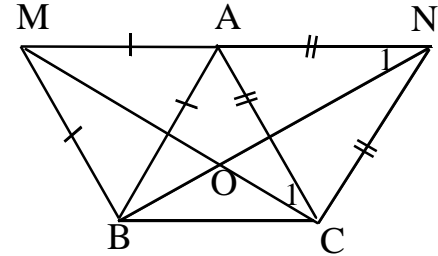
Giải

GT $\triangle ABC$: $\angle A = 60^\circ$

$\triangle ABM$: $AB = BM = MA$

$\triangle CAN$: $AC = CN = NA$

$BN \cap CM = \{O\}$



Kl a. A, M, N thẳng hàng

b. $BN = CM$

c. $\angle BOC = ?$

Chứng minh

a. $\triangle ABM, \triangle CAN$ đều $\Rightarrow \angle BAM = \angle CAN = 60^\circ$

Vậy $\angle MAN = \angle BAM + \angle BAC + \angle CAN = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow M, A, N$ thẳng hàng

b. Xét $\triangle ABN$ và $\triangle ACM$ có:

$AB = AM$ (gt)

$\angle BAN = \angle CAM (=120^\circ)$

$AN = AC$ (gt)

$\Rightarrow BN = CM$ (hai cạnh tương ứng)

Và $\angle B_1 = \angle N_1$ (hai góc tương ứng)

c. $\angle BOC$ là góc ngoài của $\triangle OCN$

$\Rightarrow \angle BOC = \angle OCN + \angle ONC = \angle B_1 + \angle ACN + \angle ONC$

Mà $\angle B_1 = \angle N_1$ (cmt)

$\Rightarrow \angle BOC = \angle N_1 + \angle ACN + \angle ONC = \angle ACN + \angle ANC = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$

3.5.BT5(35/NC&PT/37)

Chứng minh rằng: Nếu hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác này bằng hai cạnh và trung tuyến thuộc cạnh thứ ba của tam giác kia thì hai tam giác đó bằng nhau.

Giải

GT $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$:

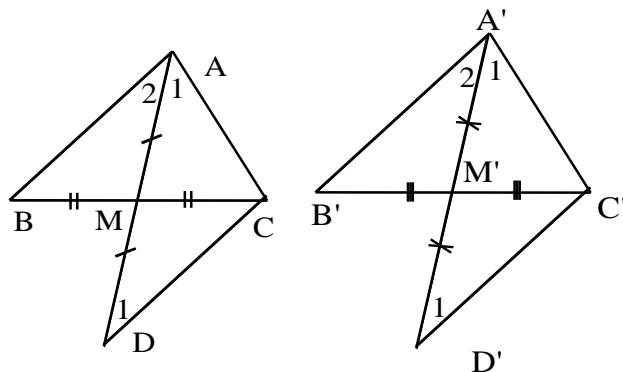
$AB = A'B', AC = A'C'$

$M \in BC: MB = MC$

$M' \in B'C': M'B' = M'C'$

$AM = A'M'$

KL $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$



Chứng minh

Lấy $D \in AM$: $MD=MA$

Lấy $D' \in A'M'$: $M'D'=M'A'$

Xét $\triangle ABM$ và $\triangle DMC$ có:

$MB=MC(gt)$
 $\left. \begin{array}{l} \angle AMB = \angle CMD (\text{đôi đỉnh}) \\ AM = MD (\text{cách lấy điểm } D) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ABM \text{ và } \triangle DMC (c.g.c)$
 $\Rightarrow CD=AB$ (hai cạnh tương ứng)

Và $\angle A_2 = \angle D_1$ (1) (hai góc tương ứng)

C/m tương tự ; $C'D'=A'B'$; $\angle A'_2 = \angle D'_1$ (2)

Xét $\triangle ACD$ và $\triangle A'C'D'$ có:

$AC = A'C' (gt)$
 $\left. \begin{array}{l} AD=A'D' (\text{vì } AM=A'M') \\ CD=C'D' (=AB) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle ACD = \triangle A'C'D' (c.g.c)$

$\Rightarrow \angle A_1 = \angle A'_1$ và $\angle D_1 = \angle D'_1$ (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \angle A_2 = \angle A'_2$ mà $\angle A_1 = \angle A'_1 \Rightarrow \angle BAC = \angle B'A'C'$

Vậy $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.g.c)

* cách 2:

$\triangle AMC$ và $\triangle A'M'C'$ có:

$AM=A'M' (gt)$
 $\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A'_1 (cmt) \\ AC = A'C' (gt) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle AMC = \triangle A'M'C' (c.g.c)$

$\Rightarrow MC = M'C'$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $MC = \frac{1}{2} BC$; $M'C' = \frac{1}{2} B'C'$ (gt). Do đó: $BC=B'C'$.

Vậy $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$ (c.c.c)

4. Chốt lại phần lý thuyết và lưu ý vận dụng chuyên đề: Khi cần phải chứng minh hai đoạn thẳng hay hai góc bằng nhau

5. Bài tập về nhà:

Cho tam giác ABC cân đáy BC. $\angle BAC = 20^\circ$. Trên cạnh AB lấy điểm E sao cho $\angle BCE = 50^\circ$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $\angle CBD = 60^\circ$. Qua D kẻ đường thẳng song song với BC, nó cắt AB tại F. Gọi O là giao điểm của BD và CF.

- C/m $\triangle AFC = \triangle ADB$.
- C/m $\triangle OFD$ và $\triangle OBC$ là các tam giác đều.
- Tính số đo góc EOB.
- C/m $\triangle EFD = \triangle EOD$.
- Tính số đo góc BDE.

