

23 BÀI TẬP TỔ HỢP – HOÁN VỊ-CHỈNH HỢP

I. Dạng Tổ hợp

Bài 1. Giải vô địch gồm 18 đội thi đấu theo thể thức vòng tròn một lượt (2 đội khác nhau gặp nhau đúng 1 lần). Hỏi có bao nhiêu trận?

Gợi ý. Mỗi đội phải đấu với 17 đội khác, mà tích 18×17 phải chia 2

Bài 2. Trên mặt phẳng cho 10 điểm sao cho không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu tam giác được tạo thành từ 3 điểm bất kỳ?

Gợi ý.

Bài 3. Hỏi có bao nhiêu số có 6 chữ số mà mỗi số tiếp theo luôn nhỏ hơn số đứng trước ?

Gợi ý. Đây là bài toán tổ hợp: mỗi số như vậy thì tương ứng với việc chọn 6 số từ 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Đáp số là C^6_{10}

II. Dạng Tổ hợp lặp

Bài 4 : Cho $A = \{a ; b ; c\}$, (a, b, c đôi một khác nhau) thì tổ hợp chập 2 có lặp của 3 phần tử a, b, c là $\{a ; a\}, \{a ; b\}, \{a ; c\}, \{b ; b\}, \{b, c\} ; \{c, c\}$.

III . Dạng Hoán vị

Bài 5. Trên sân nhảy có n nam và n nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chia cặp nhảy?

Gợi ý. $n!$

Bài 6. Hỏi có bao nhiêu số có 3 chữ số mà trong cách viết chỉ có 3 chữ số (1,2,3)?

Gợi ý. $3! = 6$

Bài 7. Một đoàn tàu có 17 toa, hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp 17 người phục vụ đi theo các toa?

Gợi ý. Đây là bài toán hoán vị: $17!$.

IV . Dạng Hoán vị lặp

Bài 8. Hỏi có bao nhiêu số có 7 chữ số, trong mỗi số đó chữ số 2 được lặp lại 3 lần và chữ số 7 lặp lại 4 lần ?

Gợi ý. Gọi số lượng các số có 7 chữ số thỏa yêu cầu đề bài là $C7(3;4)$. Ta có :
 $C7(3;4) \cdot 3! \cdot 4! = 7!$. Vậy $C7(3;4) = 7! / (3! \cdot 4!) = 35$ số.

VI. Dạng Chính hợp

Bài 9. Cho 4 chữ số 1 ; 3 ; 5 ; 7. Hỏi có bao nhiêu số gồm 3 chữ số khác nhau lấy từ 4 số đã cho ?

Gợi ý. Giả sử abc là một số thỏa yêu cầu bài toán ; ta có : 4 cách chọn a, 3 cách chọn b (sau khi đã chọn a còn lại 3 chữ số), 2 cách chọn c (sau khi đã chọn a và b còn lại 2 chữ số). Vậy có tổng cộng $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ số

Bài 10. Hỏi có bao nhiêu phương pháp chọn 4 người cho 4 chức vụ khác nhau nếu tổng cộng có 9 người?

Gợi ý : $A = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$.

VII. Dạng Chính hợp lặp

Bài 11. Một số được gọi là dễ thương nếu trong cách viết chỉ gồm những chữ số lẻ. Hỏi có bao nhiêu số dễ thương có 4 chữ số?

Gợi ý : $5^4 = 625$

Bài 12. Một số điện thoại, Trừ 3 hoặc 4 số đầu tiên là mã vùng thì còn 8 chữ số, mà số đầu bên trái luôn luôn là số 3. Hỏi có bao nhiêu số điện thoại chỉ gồm toàn chữ số lẻ ?

Gợi ý : Giả sử 3abcdxyz là một số điện thoại thỏa yêu cầu bài toán. Ta thấy mỗi chữ số a, b, c, d, x, y, z ta luôn có 5 sự lựa chọn (1, 3, 5, 7, 9). Vậy có $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$ số điện thoại thỏa yêu cầu bài toán.

VIII. Dạng Toán tổng hợp (nâng cao)

Bài 16. Mỗi biển số ô tô gồm 3 chữ cái (A, B, C) và 3 chữ số (từ số 0 đến 9) sắp xếp theo thứ tự 1 chữ cái - 3 con số - 2 chữ cái. Hỏi có bao nhiêu biển số ô tô khác nhau?

Gợi ý: Bài toán thuộc dạng qui tắc đếm và chỉnh hợp lặp : 103.303

Bài 17. Biết rằng trong một nhóm cứ chọn 2 người thì có đúng 5 người quen chung. Chứng minh rằng số cặp quen nhau chia hết cho 3.

Gợi ý. Gọi p là số cặp quen nhau, t là số bộ 3 đôi một quen nhau. Theo giả thiết, mỗi cặp quen nhau có đúng 5 người quen chung, nghĩa là mỗi trong p cặp quen nhau sẽ tham gia vào 5 bộ 3 đôi một quen nhau. Mặt khác, trong mỗi bộ 3 từ t bộ có đúng 3 cặp quen nhau. Từ đó suy ra $5p = 3t$, mặt khác ƯCLN $(3,5) = 1$ nên p chia hết cho 3.

Bài 18. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 nam và 5 nữ vào một bàn 10 chỗ sao cho nam nữ xen kẽ ?

Gợi ý. Bài toán thuộc dạng qui tắc đếm và chỉnh hợp lặp $2(5!)2 = 28800$.

Bài 19. A có 7 cây kẹo sôcôla, B có 9 cây kẹo chanh. Hỏi có bao nhiêu phương pháp trao đổi với nhau 5 cây kẹo?

Gợi ý. Bài toán thuộc dạng qui tắc đếm và tổ hợp : $C_7^5 C_9^5$

Bài 20. Một học sinh nói với bạn rằng: "Trong lớp tôi có 35 người và mỗi người chơi với đúng 11 người khác". Người bạn trả lời: "Không thể như thế được". Vì sao?

Gợi ý. Giả sử cứ hai người là bạn của nhau thì ta nối bằng một sợi dây. Vậy mỗi người trong số 35 người của lớp sẽ cầm 11 đầu dây. Từ đó suy ra có tất cả $11.35 = 385$ đầu dây, mà mỗi dây có 2 đầu nên vô lý.

Bài 21. Một lớp có 30 người, liệu có xảy ra trường hợp sao cho 9 người có 3 bạn, 11 người có 4 bạn và 10 người còn lại có 5 bạn?

Gợi ý. Cứ hai người là bạn của nhau ta nối bằng một sợi dây. Như vậy thì sẽ có 9 bạn cầm 3 đầu dây, 11 bạn cầm 4 đầu dây và 10 bạn cầm 5 đầu dây, điều này vô lý. Số đầu giây sẽ là : $9 \times 3 + 11 \times 4 + 10 \times 5 = 27 + 44 + 50 = 121$ - là một số lẻ - vô lý bởi số đầu giây phải là một số chẵn.

Bài 22. Trong đội bóng có 11 người và cần chọn một đội trưởng, một đội phó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Gợi ý. Đáp án: $10 \times 11 = 110$ (cách)

Bài 23. Xét các hình chữ nhật với các cạnh là số nguyên (đơn vị đo) gồm 2 loại: chu vi bằng 1996 và chu vi bằng 1998. Hỏi loại nào có số lượng hình chữ nhật lớn hơn?

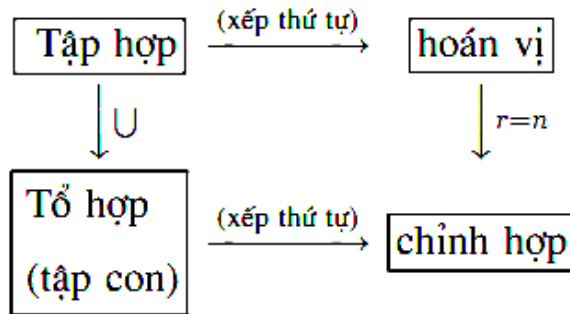
Gợi ý. Nếu hình chữ nhật có chu vi bằng 1996 thì tổng độ dài 2 cạnh là 998, tức là cạnh nhỏ chỉ thuộc khoảng từ 1 đến 499

→ nên có tất cả 499 hình chữ nhật loại này.

Tương tự, nếu hình chữ nhật có chu vi bằng 1998 có tổng độ dài 2 cạnh là 999 và cạnh nhỏ cũng thuộc khoảng từ 1 đến 499

→ nên loại này cũng có 499 hình chữ nhật.

Tóm tắt



Công thức.

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(ii) Quy ước $0! = 1 \implies C_n^0 = 1$.

(iii) $C_n^r = C_n^{n-r}$, $C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$.