CHƯƠNG V. ĐẠO HÀM

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

+ Cho hàm số y = f(x) xác định trên khoảng (a; b) và x_o thuộc (a; b)

$$f'(x_o) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

+ Nếu hàm số y = f(x) có đạo hàm tại x_o thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

+ $f'(x_o)$ là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại M (x_o; $f(x_o)$).

+ Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số y = f(x) tại M (x_o; $f(x_o)$) là $y = f'(x_o)(x - x_o) + y_o$.

3. Qui tắc tính đạo hàm

+ $(C)' = 0$; $(x)' = 1$; $(x^n)' = n.x^{n-1}$ với n thuộc Z, $n \neq 0$; $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

+ $(u + v)' = u' + v'$; $(u.v)' = u'.v + v'.u$; $(u / v)' = (u'v - v'u) / v^2$; $(ku)' = ku'$; $(1/v)' = - v' / v^2$ $(v \neq 0)$

+ Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu u = g(x) có đạo hàm tại x là u′ (x) và hàm số y = f(u) có đạo hàm tại u là f′(u) thì hàm số hợp y = f(g(x)) có đạo hàm tại x là $y' = f'(u).u'(x)$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

+ Giới hạn cơ bản $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ + $\lim_{x\to x_o}\frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ nếu $\lim_{x\to x_o} u(x) = 0$

+ $(\sin x)' = \cos x$ + $(\cos x)' = -\sin x$ + $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ + $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

5. Vi phân

+ $dy = y'dx$ + $f(x_o + \Delta x) \approx f(x_o) + f'(x) . \Delta x$

6. Đạo hàm cấp cao $f^{(n)}(x) = [f^{(n-1)}(x)]'$ với $n \geq 2$

VẤN ĐỀ 1: Tính đạo hàm bằng định nghĩa

Để tính đạo hàm của hàm số y = f(x) tại điểm x_o bằng định nghĩa ta thực hiện các bước

Bước 1: Giả sử Δx là số gia của đối số tại x_o. Tính $\Delta y = f(x_o + \Delta x) - f(x_o)$.

Bước 2: Tính $\lim_{x\to x_o}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ suy ra $f'(x_o)$.

Bài 1: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

a) $y = f(x) = 2x^2 - x + 2$ tại $x_o = 1$ b) $y = f(x) = \sqrt{3-2x}$ tại $x_o = -3$

c) $y = f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ tại $x_o = -1$. d) $y = f(x) = \sin x$ tại $x_o = \pi/6$

e) $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$ tại $x_o = 1$ f) $y = f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$ tại $x_o = 0$

Bài 2: Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = f(x) = x^2 - 3x + 1$ b) $y = f(x) = x^3 - 2x$

c) $y = f(x) = \sqrt{x+1}$ trên $(-1; +\infty)$ d) $y = f(x) = \sin x$

e) $y = f(x) = \frac{1}{2x-3}$ với $x \neq 3/2$ f) $y = f(x) = \frac{1}{\cos x}$ trên $(0; \pi/2)$

VẤN ĐỀ 2: Tính đạo hàm bằng công thức

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$ b) $y = \frac{3}{x^2} - \frac{4}{3}x\sqrt{x}$ c) $y = (x^3 - 2)(1 - x^2)$

d) $y = x^2(x^2 - 1)(x^2 - 4)$ e) $y = x - 2 + \frac{3}{x+2}$ f) $y = \frac{2x+1}{1-3x}$

g) $y = \frac{2x^2-4x+7}{x+1}$ h) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x^2 + x + 1)^3$ b) $y = (1 - 2x^2)^5$. c) $y = \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$

d) $y = \dfrac{(x+2)^2}{(2x-1)^3}$ e) $y = (2 - \dfrac{3}{x^2})^3$ f) $y = (\dfrac{2x+1}{x-1})^4$

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sqrt{2x^2 - 5x + 2}$ b) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$ c) $y = (x^2 - 2)\sqrt{x^2 + 2x + 3}$

d) $y = (\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^3$ e) $y = \sqrt{1 + \dfrac{x^3}{x+1}}$ f) $y = \dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x+1}$

Bài 4: Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (\dfrac{\sin x}{1+\cos x})^2$ b) $y = x\cos x$ c) $y = \sin^3(2x + 1)$

d) $y = \sin x \tan^2 2x$ e) $y = \dfrac{\sin(x + \pi/3)}{\sin x - \cos x}$ f) $y = \tan^3(x^2 + 1)$

g) $y = x \sin 2x - x^2 \tan x$ h) $y = (\tan 2x - \tan^3 2x)^2$ i. $y = (x^3 - \sin 4x \cos 2x)^3$

Bài 5: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh rằng

a) $(\sin^n x.\cos nx)' = n \sin^{n-1} x \cos (n + 1)x$ b) $(\sin^n x.\sin nx)' = n \sin^{n-1} x \sin (n + 1)x$

c) $(\cos^n x.\sin nx)' = n \cos^{n-1} x \cos (n + 1)x$ d) $(\cos^n x.\cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \sin (n + 1)x$

VẤN ĐỀ 3: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số

1. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(x_o; f(x_o))$ là $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$
2. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C), biết (d) đi qua điểm $A(x_1; y_1)$ cho trước:

Cách 1:

+ Đường thẳng (d) đi qua điểm A có hệ số góc k có dạng (d): $y = k(x - x_1) + y_1$.

+ Đường thẳng (d) và đồ thị (C) tiếp xúc nhau khi và chỉ khi hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} k = f'(x) \\ k(x - x_1) + y_1 = f(x) \end{cases} \quad (1)$$

+ Giải hệ phương trình (1) với ẩn là x suy ra k. Từ đó viết phương trình (d).

Cách 2:

+ Gọi tiếp điểm là $M(x_o; f(x_o))$

+ Phương trình tiếp tuyến tại $M(x_o; f(x_o))$ có dạng là $y = f'(x_o)(x - x_o) + f(x_o)$

+ Tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_1; y_1) \Leftrightarrow y_1 = f'(x_o)(x_1 - x_o) + f(x_o)$

+ Giải phương trình theo ẩn x_o. Viết phương trình tiếp tuyến.

3. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C) song song với đường thẳng (Δ) $y = ax + b$

+ Gọi tiếp điểm là $M(x_o; f(x_o))$

+ Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_o) = a$

+ Tìm x_o, sau đó viết phương trình tiếp tuyến

4. Viết phương trình tiếp tuyến (d) với (C) vuông góc với đường thẳng (Δ) $y = ax + b$

+ Gọi tiếp điểm là $M(x_o; f(x_o))$

+ Hệ số góc tiếp tuyến là $k = f'(x_o) = -1/a$

+ Tìm x_o, sau đó viết phương trình tiếp tuyến

Bài 1: Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ với đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm thuộc (C) có hoành độ $x_o = 1$.

b) Song song với đường thẳng (Δ) $4x - 2y + 5 = 0$.

c) Vuông góc với đường thẳng (Δ) $x + 4y = 0$.

d) Vuông góc với đường phân giác thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ.

Bài 2: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2 - x + x^2}{x - 1}$ với đồ thị (C)

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 1.

Bài 3: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x+1}{1-x}$ với đồ thị (C)

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(2; –7).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng (Δ) $y = (1/2)x + 2$
e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng (Δ): $2x + 2y - 5 = 0$.
Bài 4: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2$ với đồ thị (C)
a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm I(1; –2).
b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I.
Bài 5: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{1-x-x^2}$ với đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C)
a) Tại điểm có hoành độ $x_o = 1/2$.
b) Song song với đường thẳng (Δ) $x + 2y = 0$.
VẤN ĐỀ 4: Tính đạo hàm cấp cao
1. Để tính đạo hàm cấp cao ta dùng công thức: $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$
2. Tính đạo hàm cấp n
B1. Tính đạo hàm cấp 1, 2, 3, ..., từ đó dự đoán công thức đạo hàm cấp n.
B2. Dùng phương pháp quy nạp toán học để chứng minh công thức đúng.
Bài 1: Cho hàm số $g(x) = 3(x + 1)\cos x$.
a) Tính $g'(x)$, $g''(x)$ b) Tính $g''(\pi/2)$, $g''(0)$, $g''(\pi)$
Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số đến cấp ba
a) $y = \cos x - \sin x$ b) $y = 5x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6$ c) $y = x\cos x - \sin x$
d) $y = \dfrac{x-3}{x+4}$ e) $y = \tan x$ f) $y = \dfrac{1}{1-x}$
Bài 3: Cho n là số nguyên dương. Chứng minh các công thức đạo hàm cấp n sau
a. $\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ b. $(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$ c. $(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\pi/2)$
Bài 4: Tính đạo hàm cấp n của các hàm số sau:
a) $y = \dfrac{1}{x+4}$ b) $y = \dfrac{1}{x^2+3x+2}$ c) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$
d) $y = \dfrac{1-x}{x+1}$ e) $y = \sin^2 x$ f) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$
Bài 5: Chứng minh các hệ thức sau với các hàm số cho trước
a) $xy'' + 2(y' - \sin x) + xy = 0$, $y = x\sin x$ b) $y^3y'' + 1 = 0$, $y = \sqrt{2x-x^2}$
c) $x^2y'' - 2(x^2 + y^2)(1 + y) = 0$, $y = x\tan x$ d) $2(y')^2 = 2(y - 1)y''$, $y = (x - 3) / (x + 4)$
VẤN ĐỀ 5: Tính giới hạn hàm số lượng giác
Bài 1: Tính các giới hạn
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 2x}{\sin 5x}$
Bài 2: Tính các giới hạn
a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin 2x-\cos 2x}{1+\sin 2x-\cos 2x}$ b) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{(\pi/2-x)^2}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\tan x$ d) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{2\sin(2x-\pi/3)}{\sqrt{3}-2\cos x}$
VẤN ĐỀ 6: Các bài toán khác
Bài 1: Giải phương trình $f'(x) = 0$ với
a) $f(x) = \cos x - \sin x + x$ b) $f(x) = \cos x + \sqrt{3}\sin x + 2x - 1$
c) $f(x) = \sin^2 x + 2\cos x$ d) $f(x) = \sin x - (1/4)\cos 4x - (1/6)\cos 6x$
e) $f(x) = 1 - \sin(\pi + x) + 2\cos(x/2 + 3\pi/2)$ f) $f(x) = \sin 3x - \sqrt{3}\cos 3x + 3(\cos x - \sqrt{3}\sin x)$
Bài 2: Giải phương trình $f'(x) = g(x)$ với
a) $f(x) = \sin^4 3x$ & $g(x) = \sin 6x$ b) $f(x) = \sin^3 2x$, $g(x) = 4\cos 2x - 5\sin 4x$
c) $f(x) = 2x^2\cos^2(x/2)$, $g(x) = x - x^2\sin x$ d) $f(x) = 4x\cos^2(x/2)$, $g(x) = 8\cos(x/2) - 3 - 2x\sin x$
Bài 3: Giải bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ với
a) $f(x) = x^3 + x - 2$, $g(x) = 3x^2 + x + 3$ b) $f(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$, $g(x) = x$
c) $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + \sqrt{3}$, $g(x) = 2x^3 + x^2$ b) $f(x) = 2/x$, $g(x) = x - x^3$
Bài 4: Xác định m để các bất phương trình sau nghiệm đúng với mọi x thuộc R
a) $f'(x) > 0$, $f(x) = mx^3 - 9x^2 + 3mx - 15$ b) $f'(x) < 0$, $f(x) = 2mx^3 - 3mx^2 + 6(m + 1)x + 12$

Bài 5: Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + mx - 3$. Tìm m thỏa

a) $f'(x) = 0$ có nghiệm kép. b) $f'(x) \geq 0$ với mọi x.

Bài 6: Cho hàm số $f(x) = -2mx^3 + 3mx^2 - 6(3 - m)x + 6$. Tìm m thỏa

a) $f'(x) < 0$ với mọi x.

b) $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.

c) Trong trường hợp $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt, tìm hệ thức giữa hai nghiệm không phụ thuộc vào m.

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG V

Bài 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 (x^2 - 4)$ b) $y = x^3 - 4\sqrt{x}$ c) $y = (x + 1)^3(x^2 + 2x - 3)$

d) $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{2x - 3}$ e) $y = \dfrac{1}{x^3 + 2x + 3}$ f) $y = (3 - 2x^2)^3$

Bài 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^3 + 4x + 5}$ b) $y = \dfrac{3x^2 - 2x}{\sqrt{4 - x}}$ c) $y = (1/x - 3x)^5$.

Bài 3: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin^3 (\pi/3 - x)$ b) $\tan (2x + \pi/4)$ c) $y = \dfrac{\sin x}{x}$

d) $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ e) $y = \sqrt{\cos 2x + 2}$ f) $y = \tan^3 \sqrt{1 + x^2}$

Bài 4: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) của hàm số

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2$ tại điểm $M(-1, -2)$

b) $y = \dfrac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ tại điểm có hoành độ $x_o = 0$

c) $y = \sqrt{2x + 1}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến là $k = 1/3$

Bài 5: Cho hàm số $y = x^3 - 5x^2$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) sao cho tiếp tuyến

a) Song song với đường thẳng $y = -3x + 1$

b) Vuông góc với đường thẳng $y = (1/7)x - 4$

c) Đi qua điểm A(0; 2).

Bài 6: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$. Tính giá trị của $f'(\pi/6)$, $f'(\pi/3)$.

Bài 7: Tìm m để $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc R

a) $f(x) = x^3 + (m - 1)x^2 + 2x + 1$ b) $f(x) = 3\sin x - 3m \sin 2x - \sin 3x + 6mx$

Bài 8: Chứng minh rằng $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc R

a) $f(x) = 2x + \sin x$ b) $f(x) = (2/3)x^9 - x^6 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$