

## GIẢI PHƯƠNG TRÌNH

### Bài 1. Giải phương trình

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^4 + x^2 + 1} \quad (1.1)$$

**Giải**

Xét  $x = 0$  không là nghiệm của  $PT(1.1)$ .

Với  $x \neq 0$ , chia 2 vế của  $PT(1)$  cho  $x \in \left[ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right] > 0$ , ta được

$$x + \frac{1}{x} - 3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} \quad (1.2)$$

Đặt  $x + \frac{1}{x} = y \geq 2$ ,  $PT(1.2)$  thành

$$y - 3 = -\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{y^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq 3 \\ 3(y^2 - 6y + 9) = y^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 \quad (t.m)$$

Khi đó  $x + \frac{1}{x} = 2 \Leftrightarrow x = 1 \quad (t.m)$

Vậy  $PT(1.1)$  có nghiệm duy nhất  $\boxed{x = 1}$   $\square$

### Bài 2. Giải phương trình

$$x^2 + \frac{4x^2}{(x-2)^2} = 12 \quad (2.1)$$

**Giải**

Điều kiện.  $x \neq 2$ .

**Cách 1.** Biến đổi tương đương  $PT(2.1)$  ta có

$$x^2 + 2x \cdot \frac{2x}{x-2} + \frac{4x^2}{(x-2)^2} - \frac{4x^2}{x-2} = 12$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{2x}{x-2}\right)^2 - \frac{4x^2}{x-2} = 12$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 - \frac{4x^2}{x-2} - 12 = 0 \quad (2.2)$$

Đặt  $\frac{x^2}{x-2} = y$  (2.3), PT(2.2) thành

$$y^2 - 4y - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \xrightarrow{(2.3)} x^2 + 2x - 4 = 0 \\ y = 6 \xrightarrow{(2.3)} x^2 - 6x + 12 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

Giải ra ta được tập nghiệm của PT(2.1)

$$\boxed{S = \{-1 \pm \sqrt{5}\}} \quad \square$$

**Cách 2.** Để thấy  $x = 0$  không phải là nghiệm của PT(2.1).

Đặt  $\frac{2x}{x-2} = y \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ . Ta có hệ phương trình  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 12 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$

Đặt  $S = x + y, P = xy (S^2 \geq 4P)$ , hệ phương trình trên thành

$$\begin{cases} S^2 - 2P = 12 \\ \frac{S}{P} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - 4S - 12 = 0 \\ P = 2S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = -2 \\ P = -4 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 6 \\ P = 12 \end{cases} \text{ (VN)}$$

Suy ra  $x, y$  là nghiệm của PT  $X^2 + 2X - 4 = 0$  (Định lý Viète)

Từ đó cũng suy ra được nghiệm của PT(2.1) là

$$\boxed{x = -1 \pm \sqrt{5}} \quad \square$$

**Bài 3.** Giải phương trình

$$x^4 + 4 = 5x(x^2 - 2) \quad (3.1)$$

**Giải**

Ta có

$$PT(3.1) \Leftrightarrow x^4 - 5x^3 + 10x + 4 = 0$$

Để thấy  $x = 0$  không là nghiệm của phương trình, chia 2 vế cho  $x^2$  ta được

$$\begin{aligned} x^2 - 5x + \frac{10}{x} + \frac{4}{x^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{4}{x^2} - 5\left(x - \frac{2}{x}\right) &= 0 \quad (3.2) \end{aligned}$$

Đặt  $y = x - \frac{2}{x}$  (3.3), PT(3.2) thành

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \xrightarrow{(3.3)} x^2 - x - 2 = 0 \\ y = 4 \xrightarrow{(3.3)} x^2 - 4x - 2 = 0 \end{cases}$$

Giải ra ta được tập nghiệm của PT(3.1)

$$S = \{-1; 2; 2 \pm \sqrt{6}\} \quad \square$$

**Bài 4. Giải phương trình**

$$x^3 + \frac{x^3}{(x-1)^3} + \frac{3x^2}{x-1} - 2 = 0 \quad (4.1)$$

**Giải**

Điều kiện.  $x \neq 1$ .

Áp dụng hằng đẳng thức  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$ , ta có

$$\begin{aligned} PT(4.1) \Leftrightarrow \left(x + \frac{x}{x-1}\right)^3 - 3\frac{x^2}{x-1}\left(x + \frac{x}{x-1}\right) + \frac{3x^2}{x-1} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{x^2}{x-1}\right)^3 - 3\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2 + \frac{3x^2}{x-1} - 2 &= 0 \quad (4.2) \end{aligned}$$

Đặt  $y = \frac{x^2}{x-1}$  (4.3),  $PT(4.2)$  thành

$$y^3 - 3y^2 + 3y - 2 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^3 = 1 \Leftrightarrow y = 2$$

Từ (4.3) suy ra  $x^2 - 2x + 2 = 0(VN)$ .

Vậy tập nghiệm của  $PT(4.1)$

$$\boxed{S = \emptyset} \quad \square$$

**Bài 5. Giải phương trình**

$$2\sqrt{x-1} + \sqrt{5x-1} = x^2 + 1 \quad (5.1)$$

***Giải***

Điều kiện.  $x \geq 1$ .

Ta có:

$$(x^2 - 3x + 2) + 2(x-1) - 2\sqrt{x-1} + (x+1) - \sqrt{5x-1} = 0 \quad (5.2)$$

Để thấy  $\boxed{x=1}$  là một nghiệm của  $PT(5.1)$ , với  $x \neq 1$

$$PT(5.2) \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) + 2 \frac{(x-1)^2 - (x-1)}{x-1 + \sqrt{x-1}} + \frac{(x+1)^2 - 5x+1}{x+1 + \sqrt{5x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) + 2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1 + \sqrt{x-1}} + \frac{x^2 - 3x + 2}{x+1 + \sqrt{5x-1}} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) \left( 1 + \frac{2}{x-1 + \sqrt{x-1}} + \frac{1}{x+1 + \sqrt{5x-1}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x=2} \\ 1 + \frac{2}{x-1 + \sqrt{x-1}} + \frac{1}{x+1 + \sqrt{5x-1}} = 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

$PT(5.4)$  vô nghiệm do  $VT > 1 > 0$ .

Vậy tập nghiệm của  $PT(5.1)$

$$\boxed{S = \{1; 2\}} \quad \square$$