A. KIẾN THỨC LIÊN QUAN.

- Công thức khai triển nhị thức Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, $(a, b \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^*)$.
- Công thức số tổ hợp: , $(0 \le k \le n)$.
- Tính chất lũy thừa: .

B. CÁC DẠNG TOÁN.

DẠNG 1: Tìm số hạng chứa x^α trong khai triển $(a+b)^n$.

Phương pháp.

- Viết khai triển $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$;
- Biến đổi khai triển thành $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} A.x^{f(k)}$;
- Số hạng chứa x^α tương ứng với số hạng chứa k thỏa $f(k) = \alpha$.
- Từ đó suy ra số hạng cần tìm.

Ví dụ 1. Tìm hệ số của x^{15} trong khai triển đa thức:

$$P(x) = (2x - 3x^2)^{10}$$

Lời giải.

Ta có .

Số hạng chứa x^{15} tương ứng với số hạng chứa k thỏa $10 + k = 15 \Leftrightarrow k = 5$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{15} là $C_{10}^5 . 2^5 . (-3)^5 = -6^5 C_{10}^5$.

Ví dụ 2. (D-04) Tìm số hạng không chứa x trong khai triển thành đa thức của biểu thức:

$$\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7, x > 0$$

Lời giải.

Ta có .

Số hạng không chứa x tương ứng số hạng chứa k thỏa $\frac{7}{3} - \frac{7k}{12} = 0 \Leftrightarrow k = 4$.

Vậy số hạng không chứa x là $C_7^4 = 35$.

Ví dụ 3. (A-03) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n$, biết:

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$$

Lời giải.

Theo giả thiết có: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3)$

.

Khi đó .

Số hạng chứa x^8 tương ứng số hạng chứa k thỏa $\frac{11}{2}k - 36 \Leftrightarrow k = 8$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_{12}^{8} = 495$.

Ví dụ 4. (A-04) Tìm hệ số của x^8 trong khai triển thành đa thức của biểu thức:

$$\left(1 + x^2\left(1 - x\right)\right)^8$$

Lời giải.

Ta có khai triển:

.

Số hạng chứa x^8 tương ứng số hạng chứa k và i thỏa $2k + i = 8$.

Vì $0 \le i \le k \le 8$ nên $2k + i = 8 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} k = 3 \\ i = 2 \end{array} \right.$ hoặc $\left\{ \begin{array}{l} k = 4 \\ i = 0 \end{array} \right.$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^8 là $C_8^3 C_3^2 (-1)^2 + C_8^4 C_4^0 (-1)^0 = 238$.

DANG 2. Ứng dụng của nhị thức Newton trong các bài toán liên quan đến C_n^k.

Phương pháp.

- Chọn một khai triển $(a + x)^n$ phù hợp, ở đây a là hằng số.
- Sử dụng các phép biến đổi đại số hoặc lấy đạo hàm, tích phân.
- Dựa vào điều kiện bài toán, thay x bởi một giá trị cụ thể.

Ví dụ 5. (D-02) Tìm số nguyên dương n thoả mãn hệ thức:

$$C_n^0 + 2.C_n^1 + 2^2.C_n^2 + \ldots + 2^n.C_n^n = 243$$

Lời giải.

Xét khai triển $(1 + x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Chọn $x = 2$ ta có $3^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$.

Lại theo giả thiết ta có $3^n = 243 \Leftrightarrow n = 5$.

Ví dụ 6. (A-06) Tìm hệ số của x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^n$, biết:

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \ldots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$$

Lời giải.

Xét khai triển $(1 + x)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k$.

Chọn $x = 1$ ta có $2^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k$.

Lại có $C_{2n+1}^k = C_{2n+1}^{2n+1-k}$ nên .

Lại theo giả thiết có $2^{2n} - 1 = 2^{20} - 1 \Leftrightarrow k = 10$.

Khi đó .

Số hạng chứa x^{26} tương ứng số hạng chứa k thỏa $11k - 40 = 26 \Leftrightarrow k = 6$.

Vậy hệ số của số hạng chứa x^{26} là $C_{10}^6 = 210$.

Ví dụ 7. (D-08) Tìm số nguyên dương n thoả mãn hệ thức:
$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1} = 2048$$

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k$.

Chọn lần lượt $x = 1$ và $x = -1$ ta có .

Trừ theo vế (1) và (2) ta có $2^{2n} = 2\left(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \ldots + C_{2n}^{2n-1}\right)$.

Lại theo giả thiết có $2^{2n} = 2.2048 \Leftrightarrow 2^{2n} = 2^{12} \Leftrightarrow n = 6$.

Ví dụ 8. (A-05) Tìm số nguyên dương n thỏa mãn:

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^{2n+1} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k$.

Lấy đạo hàm hai vế được $(2n+1)(1+x)^{2n} = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k k x^{k-1}$.

Thay $x = -2$ ta có $2n + 1 = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k k(-1)^{k-1} 2^{k-1}$.

Theo giả thiết ta có $2n + 1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$.

Ví dụ 9. Chứng minh rằng:
$$2.1.C_n^2 + 3.2.C_n^3 + 4.3.C_n^4 + \ldots + n\left(n-1\right)C_n^n = n\left(n-1\right)2^{n-2}$$

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Lấy đạo hàm cấp hai hai vế ta có: $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k k(k-1)x^{k-2}$.

Chọn $x=1$ ta có $n(n-1)2^{n-2} = \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k k(k-1)$ (đpcm).

Ví dụ 10. (B-03) Cho n là số nguyên dương. Tính tổng:

Lời giải.

Xét khai triển $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k$.

Lấy tích phân từ 1 đến 2 cả hai vế ta có: $\int\limits_1^2 (1+x)^n dx = \int\limits_1^2 \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k dx$

.

Vậy .

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ

1. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển biểu thức $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{21}$.

2. (A-2012) Cho n là số nguyên dương thỏa mãn $5C_n^{n-1} = C_n^3$.

Tìm số hạng chứa x^5 trong khai triển nhị thức Newton của $\left(\frac{nx^2}{14}-\frac{1}{x}\right)^n, x \neq 0$.

3. (A-03) Tìm hệ số của số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$, biết: $C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^{n} = 7(n+3)$

4. (A-02) Cho khai triển biểu thức

biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng $20n$. Tìm n và x.

5. (D-07) Tìm hệ số của x^5 trong khai triển thành đa thức của biểu thức:
$x(1-2x)^5 + x^2(1+3x)^{10}$

6. (D-03) Với n là số nguyên dương, gọi a_{3n-3} là hệ số của x^{3n-3} trong khai triển thành đa thức của $(x^2+1)^n(x+2)^n$. Tìm n để $a_{3n-3}=26n$.

7. Tính tổng $S=C_{2013}^0+3C_{2013}^1+3^2C_{2013}^2+\ldots+3^{2013}C_{2013}^{2013}$.

8. (B-07) Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} trong khai triển biểu thức:

$(2+x)^n$, biết $3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2+\ldots+(-1)^nC_n^n=2048$

9. (A-08) Cho khai triển:

$$(1+2x)^n=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,\ (n\in\mathbb{N}^*)$$

và các hệ số $a_0;a_1;a_2;\ldots;a_n$ thoả mãn hệ thức $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}=4096$.

Tìm số lớn nhất trong các số $a_0;a_1;a_2;\ldots;a_n$.

10. Tính tổng $S=C_{2013}^0+C_{2013}^2+C_{2013}^4+\ldots+C_{2013}^{2012}$.

11. Tính tổng .

12. Tìm số tự nhiên n sao cho $1.C_n^1+2.C_n^2+\ldots+nC_n^n=n.2^{2013}$.

13. Tính tổng $S=2C_n^0+5C_n^1+8C_n^2+\ldots+(3n+2)C_n^n$.

14. Tính tổng $S=1^2C_{2013}^1 2^{2012}+2^2C_{2013}^2 2^{2011}+\ldots+2013^2C_{2013}^{2013}2^0$.

Bài tập:

Baøi 1: Tìm số hạng không chứa *x* trong khai triển của nhị thức:

a) $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}$ b) $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}$ c) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5$ d) $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^6$

e) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^{10}$ f) $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$ g) $\left(x^3+\frac{2}{x^2}\right)^{15}$ h) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

ĐS: a) 45 b) 495 c) –10 d) 15 e) –8064 f) 210

Giải

a) $\left(x+\frac{1}{x^4}\right)^{10}=C_{10}^k(x)^{10-k}(\frac{1}{x^4})^k$ để biểu thức không chứa x là $(x)^{10-k}(\frac{1}{x^4})^k=x^{10-5k}=x^0=1$ tức là 10-5k=0

Suy ra: k = 2 nên $C_{10}^2=\frac{10!}{2!(10-2)!}=\frac{9x10}{2}=45$

b) $\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)^{12}=C_{12}^k(x^2)^{12-k}(\frac{1}{x^4})^k$ để biểu thức không chứa x là $(x)^{24-2k}(\frac{1}{x^4})^k=x^{24-6k}=x^0=1$ tức là 24 - 6k = 0

Suy ra: k = 4 nên $C_{12}^4=\frac{12!}{4!(12-4)!}=\frac{9x10x11x12}{1x2x3x4}=495$

c) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^5=(-1)^kC_5^k(x^3)^{5-k}(\frac{1}{x^2})^k$ (do hằng đẳng thức mang dấu trừ) để biểu thức không chứa x là

$(x^3)^{5-k}(\frac{1}{x^2})^k=x^{15-5k}=x^0=1$ tức là 15 -5k = 0

Suy ra: k = 3 nên $(-1)^3C_5^3=-\frac{5!}{3!(5-3)!}=-\frac{3x4x5}{1x2x3}=-10$

d) $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)^6=(-1)^k C_6^k (x^2)^{6-k}(\dfrac{1}{x})^k$ (do hằng đẳng thức mang dấu trừ) để biểu thức không chứa x là

$(x^2)^{6-k}(\dfrac{1}{x})^k = x^{12-3k} = x^0 = 1$ tức là 12 - 3k = 0

Suy ra: k = 4 nên $(-1)^4 C_6^4 = \dfrac{6!}{4!(6-4)!} = \dfrac{5x6}{1x2} = 15$

e) $\left(2x-\dfrac{1}{x}\right)^{10} = (-1)^k C_{10}^k (2x)^{10-k}(\dfrac{1}{x})^k$ (do hằng đẳng thức mang dấu trừ) để biểu thức không chứa x là

$(2x)^{10-k}(\dfrac{1}{x})^k = (2)^{10-k} x^{10-2k} = x^0 = 1$ tức là 10-2k=0

Suy ra: k = 5 nên $(-1)^5 2^5 C_{10}^5 = -2^5 \dfrac{10!}{5!(10-5)!} = -\dfrac{6x7x8x9x10}{1x2x3x4x5} = -8064$

f) $\left(x^2+\dfrac{1}{x^3}\right)^{10} = C_{10}^k (x^2)^{10-k}(\dfrac{1}{x^3})^k$ để biểu thức không chứa x là $(x)^{20-2k}(\dfrac{1}{x^3})^k = x^{20-5k} = x^0 = 1$ tức là 20 - 5k = 0

Suy ra: k = 4 nên $C_{10}^4 = \dfrac{10!}{4!(10-4)!} = \dfrac{7x8x9x10}{1x2x3x4} = 210$

g) $\left(x^3+\dfrac{2}{x^2}\right)^{15} = C_{15}^k (x^3)^{15-k}(\dfrac{2}{x^2})^k$ để biểu thức không chứa x là $(x^3)^{15-k}(\dfrac{2}{x^2})^k = x^{45-5k} x 2^k = x^0 = 2^k$ tức là 45 -5k = 0

Suy ra: k = 9 nên $(2)^9 C_{15}^9 = 2^9 \dfrac{15!}{9!(15-9)!} = 2^9 \dfrac{10x11x12x13x14x15}{1x2x3x4x5x6} = 2^9 x5005 = 2562560$

h) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{10} = C_{10}^k (x)^{10-k}(\dfrac{1}{x})^k$ để biểu thức không chứa x là $(x)^{10-k}(\dfrac{1}{x})^k = x^{10-2k} = x^0 = 1$ tức là 10 - 2k = 0

Suy ra: k = 5 nên $C_{10}^5 = \dfrac{10!}{5!(10-5)!} = \dfrac{6x7x8x9x10}{1x2x3x4x5} = 252$

Bài 2: Khai triển đa thức *P(x)* dưới dạng: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. Xác định hệ số a_k:

a) $P(x) = (1+x)^9 + (1+x)^{10} + ... + (1+x)^{14}$; a_9 ?

Giải: a_9 là hệ số của x^9:

Ta có: $(1+x)^9$ khi $C_9^9 x^9$

$(1+x)^{10}$ khi $C_{10}^9 x^9$

.

.

.

$(1+x)^{14}$ khi $C_{14}^9 x^9$

Do đó: $a_9 = C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + ... + C_{14}^9$ = 3003

C_9^9 = 1; $C_{10}^9 = \dfrac{10!}{9!(10-9)!} = 10$; $C_{11}^9 = \dfrac{11!}{9!(11-9)!} = \dfrac{10x11}{2} = 55$; $C_{12}^9 = \dfrac{12!}{9!(12-9)!} = \dfrac{10x11x12}{1x2x3} = 220$;

$C_{13}^{9}=\frac{12!}{9!(13-9)!}=\frac{10x11x12x13}{1x2x3x4}=715$; $C_{14}^{9}=\frac{14!}{9!(14-9)!}=\frac{10x11x12x13x14}{1x2x3x4x5}=2002$

b) $P(x)=(1+x)+2(1+x)^{2}+3(1+x)^{3}+...+20(1+x)^{20}$; a_{15}?

Do đó: $a_{15}=15C_{15}^{15}+16C_{16}^{15}+17C_{17}^{15}+...+20C_{20}^{15}=400995$

$15C_{15}^{15}=15$; $16C_{16}^{15}=16\frac{16!}{15!(16-15)!}=256$;

$17C_{17}^{15}=17\frac{17!}{15!(17-15)!}=17\frac{16x17}{2}=2312$; $18C_{18}^{15}=18\frac{18!}{15!(18-15)!}=18\frac{16x17x18}{1x2x3}=14688$;

$19C_{19}^{15}=19\frac{19!}{15!(19-15)!}=19\frac{16x17x18x19}{1x2x3x4}=73644$;

$20C_{19}^{15}=20\frac{20!}{15!(20-15)!}=20\frac{16x17x18x19x20}{1x2x3x4x5}=310080$

c) $P(x)=(x-2)^{80}=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+...+a_{80}x^{80}$; a_{78}?

d) $P(x)=(3+x)^{50}=a_{0}+a_{1}x+a_{2}x^{2}+...+a_{50}x^{50}$; a_{46}?

e) $P(x)=(1+x)^{3}+(1+x)^{4}+(1+x)^{5}+...+(1+x)^{30}$; a_{3}?

ĐS: a) $a_{9}=3003$ *b)* $a_{15}=400995$ *c)* $a_{78}=12640$ *d)* $a_{46}=18654300$