Bài 1*(3 điểm)*: Tìm x biết:

a) $x^2 - 4x + 4 = 25$

b) $\frac{x-17}{1990}+\frac{x-21}{1986}+\frac{x+1}{1004}=4$

c) $4^x - 12.2^x + 32 = 0$

Bài 2 *(1,5 điểm)*: Cho x, y, z đôi một khác nhau và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$.

Tính giá trị của biểu thức: $A=\frac{yz}{x^2+2yz}+\frac{xz}{y^2+2xz}+\frac{xy}{z^2+2xy}$

Bài 3 *(1,5 điểm)*: Tìm tất cả các số chính phương gồm 4 chữ số biết rằng khi ta thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng nghìn , thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng trăm, thêm 5 đơn vị vào chữ số hàng chục, thêm 3 đơn vị vào chữ số hàng đơn vị , ta vẫn được một số chính phương.

Bài 4 *(4 điểm)*: Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AA', BB', CC', H là trực tâm. a) Tính tổng $\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}$

b) Gọi AI là phân giác của tam giác ABC; IM, IN thứ tự là phân giác của góc AIC và góc AIB. Chứng minh rằng: AN.BI.CM = BN.IC.AM.

c) Chứng minh rằng: $\frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2+BB'^2+CC'^2}\ge 4$.

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI

- **Bài 1*(3 điểm):***

a) Tính đúng x = 7; x = -3 (1 điểm)

b) Tính đúng x = 2007 (1 điểm)

c) $4^x - 12.2^x + 32 = 0 \Leftrightarrow 2^x.2^x - 4.2^x - 8.2^x + 4.8 = 0$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow 2^x(2^x - 4) - 8(2^x - 4) = 0 \Leftrightarrow (2^x - 8)(2^x - 4) = 0$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow (2^x - 2^3)(2^x - 2^2) = 0 \Leftrightarrow 2^x - 2^3 = 0$ hoặc $2^x - 2^2 = 0$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow 2^x = 2^3$ hoặc $2^x = 2^2 \Leftrightarrow x = 3; x = 2$ (0,25điểm)

- **Bài 2*(1,5 điểm)*:**

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0 \Rightarrow \frac{xy+yz+xz}{xyz}=0 \Rightarrow xy+yz+xz=0 \Rightarrow yz = -xy-xz$ (0,25điểm)

$x^2+2yz = x^2+yz-xy-xz = x(x-y)-z(x-y) = (x-y)(x-z)$ (0,25điểm)

Tương tự: $y^2+2xz = (y-x)(y-z)$; $z^2+2xy = (z-x)(z-y)$ (0,25điểm)

Do đó: $A=\frac{yz}{(x-y)(x-z)}+\frac{xz}{(y-x)(y-z)}+\frac{xy}{(z-x)(z-y)}$ (0,25điểm)

Tính đúng A = 1 (0,5 điểm)

- **Bài 3*(1,5 điểm)*:**

Gọi $\overline{abcd}$ là số phải tìm a, b, c, d$\in$ **N**, $0\le a,b,c,d\le 9, a\ne 0$ (0,25điểm)

Ta có: $\begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{(a+1)(b+3)(c+5)(d+3)}=m^2\end{cases}$ với k, m $\in$ **N**, $31<k<m<100$ (0,25điểm)

$\Leftrightarrow \begin{cases}\overline{abcd}=k^2\\ \overline{abcd}+1353=m^2\end{cases}$

(0,25điểm)

Do đó: $m^2-k^2 = 1353$

$\Rightarrow (m+k)(m-k) = 123.11 = 41.33$ ($k+m < 200$) (0,25điểm)

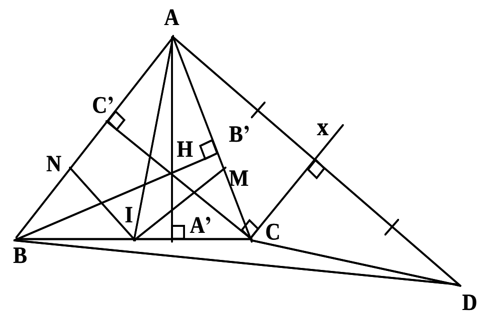
$\Rightarrow \begin{cases}m+k=123\\ m-k=11\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m+k=41\\ m-k=33\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}m=67\\ k=56\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}m=37\\ k=4\end{cases}$ (0,25điểm)

Kết luận đúng $\overline{abcd}$ = 3136 (0,25điểm)

- **Bài 4 *(4 điểm)*:**

Vẽ hình đúng
(0,25điểm)



a) $\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}=\frac{\frac{1}{2}.HA'.BC}{\frac{1}{2}.AA'.BC}=\frac{HA'}{AA'}$;

(0,25điểm)

Tương tự: $\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}=\frac{HC'}{CC'}$; $\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=\frac{HB'}{BB'}$

(0,25điểm)

$\frac{HA'}{AA'}+\frac{HB'}{BB'}+\frac{HC'}{CC'}=\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAB}}{S_{ABC}}+\frac{S_{HAC}}{S_{ABC}}=1$

(0,25điểm)

b) Áp dụng tính chất phân giác vào các tam giác ABC, ABI, AIC:

$\frac{BI}{IC}=\frac{AB}{AC};\frac{AN}{NB}=\frac{AI}{BI};\frac{CM}{MA}=\frac{IC}{AI}$

(0,5điểm)

$\frac{BI}{IC}.\frac{AN}{NB}.\frac{CM}{MA}=\frac{AB}{AC}.\frac{AI}{BI}.\frac{IC}{AI}=\frac{AB}{AC}.\frac{IC}{BI}=1$ (0,5điểm)

$\Rightarrow BI.AN.CM=BN.IC.AM$ (0,5điểm)

c)Vẽ Cx $\perp$ CC'. Gọi D là điểm đối xứng của A qua Cx

(0,25điểm)

-Chứng minh được góc BAD vuông, CD = AC, AD = 2CC'

(0,25điểm)

- Xét 3 điểm B, C, D ta có: BD $\leq$ BC + CD

(0,25điểm)

- ΔBAD vuông tại A nên: $AB^2+AD^2 = BD^2$

$\Rightarrow$ $AB^2 + AD^2 \leq (BC+CD)^2$

(0,25điểm)

$AB^2 + 4CC'^2 \leq (BC+AC)^2$

$4CC'^2 \leq (BC+AC)^2 – AB^2$

Tương tự: $4AA'^2 \leq (AB+AC)^2 – BC^2$

$4BB'^2 \leq (AB+BC)^2 – AC^2$

(0,25điểm)

-Chứng minh được : $4(AA'^2 + BB'^2 + CC'^2) \le (AB+BC+AC)^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(AB+BC+CA)^2}{AA'^2 + BB'^2 + CC'^2} \ge 4$$

(0,25điểm)

(Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow$ BC = AC, AC = AB, AB = BC $\Leftrightarrow$ AB = AC =BC

$\Leftrightarrow$ ΔABC đều)