SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2012-2013
ĐỀ THI MÔN: TOÁN
(Dành cho học sinh THPT không chuyên)
Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1.

a) Giải phương trình $\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{2-x^2}}=2\ \left(x\in\mathbb{R}\right)$

b) Cho phương trình bậc hai $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (x là ẩn và m là tham số). Tìm tất cả các giá trị thực của m sao cho phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2. Tính theo m giá trị của biểu thức $P=\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}$ và tìm giá trị nhỏ nhất của P.

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-xy+y^2+x-2y=0 \\ 2x-xy+y=2 \end{cases}\ \left(x,y\in\mathbb{R}\right)$

Câu 3. Cho a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn. Chứng minh rằng

$$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\geq 10$$

Câu 4.

a) Cho tam giác ABC, nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn $\left(O;R\right)$. Gọi G và M lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và trung điểm cạnh BC. Chứng minh rằng nếu đường thẳng OG vuông góc với đường thẳng OM thì $AC^2+AB^2+2BC^2=12R^2$.

b) Cho tam giác ABC có độ dài các đường cao kẻ từ đỉnh A, B, C lần lượt là m, n, p. Tính độ dài các cạnh AB, BC, CA theo m, n, p.

c) Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có phương trình đường thẳng chứa đường cao kẻ từ các đỉnh A, B, C lần lượt có phương trình là

$$x-2y=0,\ x-2=0,\ x+y-3=0.$$

Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C, biết rằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng $\sqrt{10}$ và đỉnh A có hoành độ âm.

Câu 5.

Cho tứ giác lồi $ABCD$ và một điểm M nằm bên trong tứ giác đó (M không nằm trên các cạnh của tứ giác $ABCD$). Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong các góc MAB, MBC, MCD, MDA có số đo không lớn hơn 45^0.

-------------Hết-----------

Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh:…………………….……….…….….…….….; Số báo danh……………………

SỞ GD&ĐT VĨNH PHÚC

(Đáp án có 03 trang)

KỲ THI CHỌN HSG LỚP 10 THPT NĂM HỌC 2012-2013

ĐÁP ÁN MÔN: TOÁN

(Dành cho học sinh THPT không chuyên)

I. LƯU Ý CHUNG:

- Hướng dẫn chấm chỉ trình bày một cách giải với những ý cơ bản phải có. Khi chấm bài học sinh làm theo cách khác nếu đúng và đủ ý thì vẫn cho điểm tối đa.

- Điểm toàn bài tính đến 0,25 và không làm tròn.

- Với bài hình học nếu thí sinh không vẽ hình phần nào thì không cho điểm tương ứng với phần đó.

II. ĐÁP ÁN:

Câu	Nội dung trình bày	Điểm
1(3đ)	**1.a (1,5 điểm)**	
	Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ 2-x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-\sqrt{2};0\right) \cup \left(0;\sqrt{2}\right)$ Đặt $y=\sqrt{2-x^2}>0$. Thay vào ta được: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$. Do đó ta có hệ phương trình:	**0,25**
	$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ x+y=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=2 \\ x+y=2xy \end{cases}$	**0,5**
	$\begin{cases} (x+y)^2-(x+y)-2=0 \\ x+y=2xy \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-0,5 \end{cases} \end{array}\right.$	**0,25**
	+) $\begin{cases} x+y=2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2-x \\ x^2-2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$	**0,25**
	+) $\begin{cases} x+y=-1 \\ xy=-0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-y \\ 2y^2+2y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{-1-\sqrt{3}}{2} \\ y=\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ (do $y>0$)	**0,25**

	Vậy phương trình đã cho có tập nghiệm là $S=\left\{\frac{-1-\sqrt{3}}{2};1\right\}$	
	1.b (1,5 điểm)	
	Phương trình $x^2-2mx+m^2-2m+4=0$ (1) có hai nghiệm không âm $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=m^2-m^2+2m-4\ge 0\\ S=2m\ge 0\\ P=m^2-2m+4\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow m\ge 2.$	**0,75**
	Theo định lý Vi-ét ta có $x_1+x_2=2m; x_1x_2=m^2-2m+4$. Do đó $\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}=\sqrt{\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\right)^2}=\sqrt{x_1+x_2+2\sqrt{x_1x_2}}=\sqrt{2m+2\sqrt{(m-1)^2+3}}$	**0,5**
	Do $m\ge 2\Rightarrow \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}\ge\sqrt{8}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $m=2$.	**0,25**
2(2đ)	Đặt $z=y-1$, thay vào hệ ta được: $\begin{cases}x^2-xz+z^2=1\\ x-xz+z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)^2-3xz=1\\ x+z-1=xz\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+z)^2-3(x+z)+2=0\\ x+z-1=xz\end{cases}$	**0,5**
	$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x+z=2\\ x+z=1\end{array}\right.\\ xz=x+z-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+z=2\\ xz=1\end{cases}\\ \begin{cases}x+z=1\\ xz=0\end{cases}\end{array}\right.$	**0,5**
	+) $\begin{cases}x+z=2\\ xz=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=2-x\\ x^2-2x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$	**0,25**
	+) $\begin{cases}x+z=1\\ xz=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=1-x\\ x^2-x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,z=0\\ x=0,z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1,y=1\\ x=0,y=2\end{cases}$	**0,5**
	Vậy hệ phương trình có tập nghiệm là $S=\{(1;2),(1;1),(0;2)\}$	**0,25**
3(1đ)	Do a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác không nhọn nên có một trong các bất đẳng thức sau xảy ra: $a^2\ge b^2+c^2$, $b^2\ge c^2+a^2$, $c^2\ge a^2+b^2$. Giả sử $a^2\ge b^2+c^2$, khi đó ta có:	**0,25**
	$\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=1+a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+\frac{b^2+c^2}{a^2}+\left(b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)$ $\ge 1+a^2.\frac{4}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+4$	**0,25**
	$=1+\frac{3a^2}{b^2+c^2}+\frac{a^2}{b^2+c^2}+\frac{b^2+c^2}{a^2}+4\ge 1+3+2\sqrt{\frac{a^2}{b^2+c^2}.\frac{b^2+c^2}{a^2}}+4=10$. Do đó $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\ge 10$.	**0,5**
4(3đ)	**4.a (1,0 điểm)**	
	Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có:	**0,25**

	$\overrightarrow{OG}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3}$, $\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$. Khi đó	
	$OG\perp OM\Rightarrow \overrightarrow{OG}.\overrightarrow{OM}=0\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)=0$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}+2R^2=0$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(2R^2-AB^2\right)+\frac{1}{2}\left(2R^2-AC^2\right)+2R^2-BC^2+2R^2=0$ (chú ý $\vec{a}.\vec{b}=\frac{\vec{a}^2+\vec{b}^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}{2}$)	**0,25**
	$\Leftrightarrow AB^2+AC^2+2BC^2=12R^2$	**0,25**
	4.b(1,0 điểm)	
	Kí hiệu $a=BC,b=CA,c=AB,\ p=\frac{a+b=c}{2}$. Khi đó ta có $a=\frac{2S}{m},b=\frac{2S}{n},c=\frac{2S}{p}$	**0,25**
	Theo công thức Hê – rông ta có: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $\Leftrightarrow 4S=\sqrt{2S\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)2S\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)2S\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)}$	**0,25**
	$\Leftrightarrow 4S=4S^2.k\Leftrightarrow S=\frac{1}{k}$, trong đó $k=\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)}$	**0,25**
	Do đó $a=\frac{2}{mk},b=\frac{2}{nk},c=\frac{2}{pk}$.	**0,25**
	4.c (1,0 điểm)	
	Do BC vuông góc với đường cao kẻ từ A nên BC có dạng $2x+y+c=0$. Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ $\begin{cases}2x+y+c=0\\x-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-c-4\end{cases}\Rightarrow B(2;-c-4)$, tọa độ C là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2x+y+c=0\\x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-c-3\\y=c+6\end{cases}\Rightarrow C(-c-3;c+6)$.	**0,25**
	AB đi qua $B(2;-c-4)$ và vuông góc với đường cao kẻ từ C nên AB: $1.(x-2)-1.(y+c+4)=0\Leftrightarrow x-y-c-6=0$. Tọa độ đỉnh C là nghiệm của hệ $\begin{cases}x-y-c-6=0\\x-2y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2c+12\\y=c+6\end{cases}\Rightarrow A(2c+12;c+6)$.	**0,25**
	Theo giả thiết ta có $\sqrt{10}=\frac{AB.AC.BC}{4S_{ABC}}\Leftrightarrow\sqrt{10}=\frac{AB.AC.BC}{2.d(A,BC).BC}\Leftrightarrow\frac{AB.AC}{d(A,BC)}=2\sqrt{10}$ $\Leftrightarrow\frac{\sqrt{(2c+10)^2+(2c+10)^2}.\lvert 3c+15\rvert}{\frac{\lvert 4c+24+c+6+c\rvert}{\sqrt{5}}}=2\sqrt{10}\Leftrightarrow\lvert c+5\rvert=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-7\\c=-3\end{array}\right.$	**0,25**

	+) Nếu $c=-7 \Rightarrow A(-2;-1), B(2;3), C(4;-1)$. +) Nếu $c=-3 \Rightarrow A(6;3), B(2;-1), C(0;3)$ không thỏa mãn hoành độ của A âm. Vậy $A(-2;-1), B(2;3), C(4;-1)$.	**0,25**
5(1đ)	Giả sử $\min\left\{MAB,\ MBC,\ MCD,\ MDA\right\} > 45^0$ (1). Ta có $\cot MAB = \dfrac{\cos MAB}{\sin MAB} = \dfrac{MA^2+AB^2-MB^2}{2.MA.AB.\sin MAB} = \dfrac{MA^2+AB^2-MB^2}{4S_{MAB}}$.	**0,25**
	Kết hợp với (1) ta được $\dfrac{MA^2+AB^2-MB^2}{4S_{MAB}} < \cot 45^0 = 1 \Rightarrow MA^2+AB^2-MB^2 < 4S_{MAB}\ (2)$ Tương tự ta được các bất đẳng thức sau đây : $MB^2+BC^2-MC^2 < 4S_{MBC}\ (3)$ $MC^2+CD^2-MD^2 < 4S_{MCD}\ (4)$ $MD^2+DA^2-MA^2 < 4S_{MDA}\ (5)$	**0,25**
	Cộng theo vế các bất đẳng thức (2), (3), (4), (5) ta được: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 < 4\left(S_{MAB}+S_{MBC}+S_{MCD}+S_{MDA}\right) = 4S_{ABCD}$ (6)	**0,25**
	Mặt khác ta lại có: $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 \geq 2AB.BC+2CD.DA \geq 4S_{ABC}+4S_{CDA} = 4S_{ABCD}$, mâu thuẫn với (6). Do đó giả sử ban đầu là sai suy ra tồn tại ít nhất một trong các góc $MAB,\ MBC,\ MCD,\ MDA$ có số đo không lớn hơn 45^0.	**0,25**

---------------------Hết---------------------