# Các bài toán chứng minh bất đẳng thức bằng phản chứng

***Giới thiệu:** Nhiều khi gặp các bài toán chứng minh bất đẳng thức (BĐT là đúng) theo các suôi chiều rất khó, nhưng chứng minh điều ngược lại (Phủ định BĐT đã cho ) để dàng hơn. Người ta gọi đó là phương pháp chứng minh phản chứng.*

*Tài liệu này NST xin giới thiệu nguyên tắc và một số bài toán chứng minh BĐT bằng phản chứng để các bạn tham khảo*

***Các bước chứng minh phản chứng**

Muốn chứng minh một mệnh đề $P$ đúng, ta làm theo các bước như sau:

( Ký hiệu $\overline{P}$ là phủ định của P)

Các bước CM bằng phản chứng :

- Giả sử $P$ sai, tức là $\overline{P}$ đúng.
- Từ $\overline{P}$ đúng dẫn đến điều mâu thuẫn.
- Kết luận $P$ đúng.

***Một ví dụ dễ hiểu:**

Phải chứng minh *“Mẹ nhiều tuổi hơn con”* mà không có tư liệu gì khác thì rất khó, mặc dù đó là điều hiển nhiên. Nhưng có thể lập luận rằng “Nếu mẹ bằng hoặc ít tuổi hơn con thì mẹ không thể đẻ ra con được ⇨ Vậy mẹ phải nhiều tuổi hơn con”. Đó là cách CM phản chứng.

Lưu ý: CM bằng phản chứng phải chú ý : Đặt điều kiện, như ví dụ trên thì điều kiện phải có là:

- Cặp mẹ con đó là mẹ con ruột ( không phải mẹ nuôi )
- Hai mẹ con đang còn sống. Vì có thể sau khi mẹ chết >30 năm thì tuổi con có thể > tuổi mẹ

**Bài toán 1**

Cho các số dương $a, b$. Chứng minh rằng nếu $a < b$ thì $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

**Lời giải:**

Giả sử $\frac{1}{a} \le \frac{1}{b}$. Khi đó

$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{ab} \leq 0 \Leftrightarrow b - a \leq 0$ (vì $ab > 0$).

Suy ra $b \leq a$, mâu thuẫn với giả thiết.

Vậy điều giả sử là sai hay $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Là đúng (ĐPCM)

***lưu ý**: "Điều kiện" bắt buộc trong dữ liệu đầu bài đã cho a,b là các số dương (a,b > 0). Nếu đầu bài không cho điều kiện dữ liệu này thì ta phải biện luận, Và khi a,b < 0 thì với $a < b$ ta có $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

**Bài toán 2.**

Chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $|x+y| \leq |x| + |y|$.

**Lời giải:**

Giả sử tồn tại $x, y$ sao cho $|x+y| > |x| + |y|$.

Ta phải chứng minh rằng $\forall x \in \mathbb{R}$ ta có điều vô lí $|x+y| \leq |x| + |y|$.

Thật vậy: Vì hai vế đều dương, bình phương lên ta có

$(x+y)^2 > x^2 + 2|x||y| + y^2 \geq 2xy > 2|x||y|$

Điều này vô lí. ⇨ Vậy $|x+y| \leq |x| + |y|$. (ĐPCM)

**Bài toán 3.**

Cho các số không âm $a, b, c, d$. Chứng minh rằng

$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$

**Lời giải:**

Giả sử $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$. Bình phương hai vế không âm, ta được

$(a+c)(b+d) < ab + cd + 2\sqrt{ab.cd} \Leftrightarrow ad + bc < 2\sqrt{ad.bc}.$

Điều này vô lí, vì theo BĐT Cauchy thì $ad + bc \geq 2\sqrt{ad.bc}$.

Vậy BĐT ban đầu $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$ là đúng. (ĐPCM)

Cùng trang này NST giới thiệu 13 phương pháp chứng minh BĐT thường gặp

---

Sưu tâm và biên soạn Pham Huy Hoạt 21/11/2012