

## NHỮNG BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG GẶP

Những kiến thức thông gặp  $(a+b)^2 \geq 4ab$

Bất đẳng thức hay dùng cho  $a+b \geq 0 \Rightarrow \frac{a^n + b^n}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^n$ ,  $n$  là số tự nhiên

Dấu bằng xảy ra khi  $a=b$  với  $n$  chẵn,  $a^2 = b^2$  nếu  $n$  lẻ

Giải phương trình: Giải phương trình  $(x+1)^6 + (x + \sqrt{5})^6 = 18 - 8\sqrt{5}$

$$\frac{(-1-x)^6 + (x + \sqrt{5})^6}{2} \geq \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^6 = 9 - 4\sqrt{5} \Rightarrow x = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

### **Bài 1**

Chứng minh  $\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$ ; với  $a, b, c$  dương.

**Giải:**  $a^4 + b^4 \geq 2a^2b^2 \Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$

$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$ , chia  $abc \Rightarrow \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a+b+c$

### **Bài 2**

Chứng minh:  $\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} + \frac{b}{b+\sqrt{(b+a)(b+c)}} + \frac{c}{c+\sqrt{(c+b)(c+a)}} \leq 1$

Với  $a, b, c > 0$

**Giải:**  $\sqrt{(a+b)(a+c)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{ac} \Rightarrow (a+b)(a+c) - (\sqrt{ac} + \sqrt{ab})^2 = (a - \sqrt{bc})^2 \geq 0$

$$\frac{a}{a+\sqrt{(a+b)(a+c)}} \leq \frac{a}{a+\sqrt{ab}+\sqrt{ac}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$$

Cộng ba vế lại có (đpcm)

### **Bài 3**

Cho  $a, b, c$  là ba số dương và  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c$ . Chứng minh:

$a + b + c \geq 3abc$

**Giải:** Từ  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = a + b + c \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc(a+b+c)$

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) \geq 3(ab + bc + ca)$

$(a+b+c)^2 \geq 3(ab + bc + ca) = 3abc(a+b+c) \Leftrightarrow a + b + c \geq 3abc$

### **Bài 4**

Chứng minh bất đẳng thức:  $\frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \geq 1$

với  $a, b, c$  là các số d-ơng và  $a^2 + b^2 + c^2 = 6$ .

**Giải:** Sử dụng  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x+y+z} \Rightarrow \frac{1}{ab+1} + \frac{1}{bc+1} + \frac{1}{ca+1} \geq \frac{9}{ab+bc+ca+3}$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \text{ dấu bằng khi } a = b = c \Rightarrow \frac{9}{ab+bc+ca+3} \geq \frac{9}{a^2+b^2+c^2+3} = 1$$

dấu bằng khi  $a = b = c = \sqrt{2}$ .

**Bài 5**

Gọi  $a, b, c$  là ba cạnh tam giác. Chứng minh  $a^3 + b^3 + 3abc > c^3$

**Giải:**  $a+b > c$  và  $a^2 - ab + b^2 > 0$ ,  $a^3 + b^3 + 3abc = (a+b)(a^2-ab+b^2) + 3abc > c(a^2-ab+b^2) + 3abc = c(a+b)^2 > c^3$

**Bài 6**

Cho  $a, b, c$  là ba số d-ơng và có tổng bằng 3.

Chứng minh  $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \geq ab + bc + ca$

**Giải:**  $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca) = 9 \Rightarrow ab+bc+ca = \frac{9 - a^2 - b^2 - c^2}{2}$

Thay vào ta cần chứng minh:  $a^2 + b^2 + c^2 + 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) \geq 9$

$$a^2 + 2\sqrt{a} = a^2 + \sqrt{a} + \sqrt{a} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{a}\sqrt{a}a^2} = 3a$$

Cộng các vế ta có (đpcm)

**Bài 7**

Cho  $a, b$  là các số thực thoả mãn  $a^2 + b^3 \geq a^3 + b^4$ . Chứng minh:

$$a^3 + b^3 \leq 2$$

**Giải:**

Cách 1: Tr-ớc hết chứng minh  $a + b^2 \geq a^2 + b^3$

Giả sử  $a + b^2 < a^2 + b^3 \Rightarrow 2(a^2 + b^3) > a + b^2 + a^3 + b^4 \geq 2(a^2 + b^3)$  vô lý

$$a + b^2 \geq a^2 + b^3 \geq a^3 + b^4 \Rightarrow 2(a + b^2) \geq a^2 + b^3 + a^3 + b^4$$

$$(1+a^2) + (1+b^4) \geq 2(a + b^2) \geq a^2 + b^3 + a^3 + b^4 \Rightarrow a^3 + b^3 \leq 2$$

Cách 2: Bằng ph-ơng pháp phản chứng . Giả sử  $a^3 + b^3 > 2$ . Chứng minh:

$$a^2 + b^3 < a^3 + b^4$$

Từ  $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \sqrt[3]{\frac{a^3+b^3}{2}} \Rightarrow a^2 + b^2 \leq \sqrt[3]{2(a^3+b^3)^2} < \sqrt[3]{(a^3+b^3)^2(a^3+b^3)} = a^3+b^3$

$$a^2 - a^3 < b^3 - b^2, \text{ nh-ng } 0 \leq b^2(b-1)^2 \Rightarrow b^3 - b^2 \leq b^4 - b^3 \Rightarrow a^2 - a^3 < b^4 - b^3$$

$$\Rightarrow a^2 + b^3 < a^3 + b^4.$$

**Bài 8**

Cho  $a, b, c$  là các số thực đặt  $M = a + b + c + 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$

Chứng minh  $M \geq \max\{3a, 3b, 3c\}$  và một trong 3 số:

$$\sqrt{M - 3a}; \sqrt{M - 3b}; \sqrt{M - 3c} \text{ bằng tổng hai số kia.}$$

**Giải:**  $3(b - c)^2 \geq 0 \Rightarrow 4b^2 + 4c^2 - 4bc \geq b^2 + c^2 + 2bc \Rightarrow$

$$4(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq (2a - b - c)^2$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca} \geq 2a - b - c \Rightarrow \text{cộng hai vế với } a + b + c$$

$$T\text{-ong tự } M \geq 3b, M \geq 3c \Rightarrow M \geq \max\{3a, 3b, 3c\}$$

$$\text{đặt } x = \sqrt{M - 3a}, y = \sqrt{M - 3b}, z = \sqrt{M - 3c} \Rightarrow a = \frac{M - x^2}{3}, b = \frac{M - y^2}{3}, c = \frac{M - z^2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 6\sqrt{\frac{1}{2}(a - b)^2 + \frac{1}{2}(b - c)^2 + \frac{1}{2}(c - a)^2}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\sqrt{x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2}$$

$$x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2 = 0$$

$$(x^2 + y^2)^2 - 2z^2(x^2 + y^2) + z^4 - 4x^2y^2 = 0$$

$$(x + y + z)(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = 0$$

### **Bài 9**

Cho 4 số thực a, b, c, d và  $a^2 + b^2 \leq 1$ . Chứng minh:

$$(ac + bd - 1)^2 \geq (a^2 + b^2 - 1)(c^2 + d^2 - 1)$$

**Giải:** Nếu  $c^2 + d^2 \geq 1$  bất đẳng thức đúng.

Chúng ta chứng minh  $c^2 + d^2 < 1$ , đặt  $x = 1 - a^2 - b^2$  và  $y = 1 - c^2 - d^2$

$$0 \leq x, y \leq 1. \text{ Bất } \Leftrightarrow (2 - 2ac - 2bd)^2 \geq 4xy \Leftrightarrow ((a - c)^2 + (b - d)^2 + x + y)^2 \geq 4xy$$

$$((a - c)^2 + (b - d)^2 + x + y)^2 \geq (x + y)^2 \geq 4xy.$$

### **Bài 10**

Cho a, b, c là ba số d-ơng và  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh  $\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq 1$

**Giải:**  $a^3 + b^3 \geq ab(a + b) \Rightarrow \frac{a^3}{b} + b^2 \geq ab + a^2$  cộng lại (cđpcm)

### **Bài 10**

Chứng minh:  $\frac{a^3}{b^2 + c^2} + \frac{b^3}{c^2 + a^2} + \frac{c^3}{a^2 + b^2} \geq \frac{a + b + c}{2}$

**Giải:**  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  từ đó  $\frac{a^3}{b^2 + c^2} = a - \frac{ab^2}{b^2 + c^2} \geq a - \frac{b}{2}$

### **Bài 11**

Cho a, b, c, d là các số d-ơng và có tổng bằng 1. Chứng minh:

$$\frac{a^2}{a + b} + \frac{b^2}{b + c} + \frac{c^2}{c + d} + \frac{d^2}{d + a} \geq \frac{1}{2}$$

**Giải:**  $\frac{a^2}{a + b} + \frac{a + b}{4} \geq a$

Đều bằng khi  $a = b = c = d = \frac{1}{4}$ .

### **Bài 12**

Cho a, b, c với  $0 < a, b, c \leq 1$ . Chứng minh:

$$1) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq a + b + c$$

$$2) \frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k} \geq a^k + b^k + c^k \text{ (k là số tự nhiên)}$$

**Giải:** 1)  $(a-1)(b-1)(c-1) = abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 =$   
 $= 1 - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + a + b + c - 1 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} + a + b + c \leq 0$

2)  $0 < a \leq 1 \Leftrightarrow 0 < a^k - 1 \leq 0$   
 $(a-1)(b-1)(c-1) \leq 0 \Rightarrow (a^k-1)(b^k-1)(c^k-1) \leq 0$   
 $(a^k-1)(b^k-1)(c^k-1) = a^k b^k c^k - a^k b^k - b^k c^k - c^k a^k + a^k + b^k + c^k - 1 \leq 0$   
 $\frac{1}{a^k} + \frac{1}{b^k} + \frac{1}{c^k} \geq a^k + b^k + c^k.$

### Bài 13

Cho a, b, c là các số không âm và có tổng bằng 1. Chứng minh:

$$a^2b + b^2c + c^2a \leq \frac{4}{27} \text{ (CanMO1999)}$$

**Giải:** Gọi  $x = \max\{a, b, c\}$

•  $a \geq b \geq c \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a \leq a^2b + b^2c + c^2a + c(ab + (a-b)(b-c)) =$   
 $= a^2b + 2abc + bc^2 = (a + c)^2b = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}b\right)b \leq \frac{4}{27}$

dấu bằng khi  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0.$

\*  $a \geq c \geq b \Rightarrow a^2b + b^2c + c^2a = a^2c + c^2b + b^2a + (a-c)(c-b)(a-b) \leq$   
 $\leq a^2c + c^2b + b^2a \leq \frac{4}{27}$  (trở lại trường hợp trên)

dấu bằng xảy ra khi hoán vị  $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}, c = 0.$

### Bài 14

Cho a, b, c là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq 1. \text{ (IMO-2001)}$$

**Giải:** Cách 1-  $f(a, b, c) = f(ka, kb, kc) \Rightarrow$  đặt  $abc = 1$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{a^3}}}, \text{ đặt } x = 1 + \frac{8}{a^3}, y = 1 + \frac{8}{b^3}, z = 1 + \frac{8}{c^3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} \geq \sqrt{xyz}$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + zx + 2\sqrt{xyz}(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}) \geq xyz$$

$$x = 1 + \frac{8}{a^3} \geq 9\sqrt{\frac{1}{a^{24}}} = \frac{9}{a^2\sqrt[3]{a^2}} \Rightarrow \sqrt{x} \geq \frac{3}{a\sqrt[3]{a}} \Rightarrow \sqrt{xyz} \geq \frac{27}{\sqrt[3]{(abc)^4}} = 27$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{xyz}} = 9$$

Cách 2

Chứng minh:  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq \frac{a\sqrt[3]{a}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}$

$$\Leftrightarrow (a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})^2 \geq \sqrt[3]{a^2} (a^2 + 8bc)$$

$$(a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})^2 - (a\sqrt[3]{a})^2 = (b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})(2a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}) =$$

$$(b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})(a\sqrt[3]{a} + a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}) \geq 2\sqrt[3]{(bc)^2} 4\sqrt[3]{a^2\sqrt[3]{bc}} = 8bc\sqrt[3]{a^2} \Leftrightarrow$$

$$(a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c})^2 \geq (a\sqrt[3]{a})^2 + 8bc\sqrt[3]{a^2} = \sqrt[3]{a^2} (a^2 + 8bc), \text{ t-ong tự}$$

$$\frac{b}{\sqrt{b^2 + 8ca}} \geq \frac{b\sqrt[3]{b}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}}, \frac{c}{\sqrt{c^2 + 8ab}} \geq \frac{c\sqrt[3]{c}}{a\sqrt[3]{a} + b\sqrt[3]{b} + c\sqrt[3]{c}} \text{ cộng lại (đpcm)}$$

Mở rộng  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + kab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+k}}, k \geq 8$

### Bài 15

Chứng minh bất đẳng thức  $ab + bc + ca \leq \frac{2}{7} + \frac{9}{7}abc$

với a, b, c là các số d-ong và có tổng bằng 1 (Chọn đội tuyển QG 2004)

**Giải:** Nếu  $a \geq \frac{7}{9} \Rightarrow \frac{9a}{7} \geq 1 \Rightarrow bc \leq \frac{9abc}{7}, a + b + c = 1 \Rightarrow b + c \leq \frac{2}{9},$  do  $a < 1$

$$\Rightarrow ab + ac < \frac{2}{9} < \frac{2}{7} \Rightarrow ab + bc + ac \leq \frac{2}{7} + \frac{9}{7}abc$$

Nếu  $a < \frac{7}{9} \Rightarrow 1 - \frac{9a}{7} > 0, bc \leq \frac{(b+c)^2}{4}, \Rightarrow bc \leq \frac{(1-a)^2}{4}$

$$ab + bc + ac - \frac{9}{7}abc = bc(1 - \frac{9}{7}a) + a(b+c) \leq (1 - \frac{9a}{7})\frac{(1-a)^2}{4} + a(1-a) \leq \frac{2}{7}$$

$$(7 - 9a)(1 - a)^2 + 28a(1 - a) \leq 8 \Rightarrow (a + 1)(3a - 1)^2 \geq 0$$

Dấu bằng khi  $a = b = c = \frac{1}{3}$

### Bài 16

Cho a, b, c là các số d-ong  $a+b+c = abc$ . Chứng minh:

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}$$

**Giải:** Đặt  $a = \operatorname{tg}\alpha, b = \operatorname{tg}\beta, c = \operatorname{tg}\gamma,$  với  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi/2)$  và  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha} = \frac{a + b + c - abc}{1 - ab - bc - ca}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma &= \cos \alpha + \cos \beta - \cos(\alpha + \beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 \leq \\ 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} + 1 &= 2 \sin \frac{\gamma}{2} - 2 \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} (2 \sin \frac{\gamma}{2} - 1)^2 \leq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

**Bài 17**

Cho a, b, c là các số d-ong. Chứng minh:

$$\frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+a)} + \frac{1}{c(c+b)} \geq \frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

**Giải:**  $\frac{1}{a(a+c)} + \frac{1}{b(b+a)} + \frac{1}{c(c+b)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$

$$a + b + c \geq 3 \sqrt[3]{abc}, \quad a + b + c = \frac{1}{2} (a + b + b + c + c + a) \geq \frac{3}{2} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$(a+b+c)^2 \geq \frac{9}{2} \sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)abc} \quad \text{thay vào (đpcm)}$$

**Bài 18**

Tìm hàm số f(x) biết rằng với mọi số thực x, y, z ta có:

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$$

**Giải:** Thay x = y = -z  $\Rightarrow f(2x) \geq f(0)$

$$\text{Thay } x=z=-y \Rightarrow f(2x) \leq f(0) \Rightarrow f(x) = \text{const}$$

**Bài 19**

Chứng minh  $[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{9n+8}]$ , với n số tự nhiên

**Giải** Thực ra đây là chứng minh bất:

$$(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} \Rightarrow 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+2} + \sqrt{n}$$

$$\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} < 3\sqrt{n+1} = \sqrt{9n+9}$$

Chứng minh  $\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} > \sqrt{9n+8}$  với n = 0 và n = 1 đúng

$$n \geq 2, \quad n(n+2) - (n + \frac{7}{9})^2 = \frac{4n}{9} - \frac{49}{81} > 0 \text{ với } n \geq 2, \Rightarrow \sqrt{n(n+2)} > n + \frac{7}{9}$$

$$\text{Từ } 2\sqrt{n+1} > \sqrt{n+2} + \sqrt{n} \Rightarrow 2(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}) > 3(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})$$

$$(\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2})^2 > \frac{9}{4} (2n+2 + \sqrt{n(n+2)}) > \frac{9}{4} (2n+2 + 2n + 2 \cdot \frac{7}{9}) = 9n+8$$

**Bài 20**

Cho a, b, c là các số d-ong có tích bằng 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{a+b+1} + \frac{1}{b+c+1} + \frac{1}{a+c+1} \leq \frac{1}{a+2} + \frac{1}{b+2} + \frac{1}{c+2}$$

**Giải:** đặt  $x = a + b + c$  và  $y = ab + bc + ca$  ( $x, y \geq 3$ )

$$\frac{x^2 + 4x + y + 3}{x^2 + 2x + xy + y} \leq \frac{4x + y + 12}{4x + 2y + 9} \Rightarrow 3x^2y + xy^2 + 6xy - 5x^2 - y^2 - 24x - 3y - 27 \geq 0$$

$$(3x^2y - 5x^2 - 12x) + (xy^2 - y^2 - 3x - 3y) + (6xy - 9x - 27) \geq 0, \text{ đúng } x, y \geq 3$$

### Bài 21

a, b, c là ba cạnh của tam giác có chu vi bằng 2. Chứng minh:

$$1 < ab + bc + ca - abc \leq \frac{28}{27}$$

**Giải:** Giả sử  $c \leq b \leq a$ , từ  $2 - a = b + c > a \Rightarrow a < 1$

Xét:  $ab + bc + ca - abc - 1 = a(b+c) + bc(1-a) - 1 = a(2-a) + bc(1-a) - 1 = (1-a)(bc+a-1)$

$b < 1, c < 1 \Rightarrow (b-1)(c-1) > 0 \Rightarrow bc + 1 - b - c > 0 \Rightarrow bc + a - 1 > 0 \Rightarrow$  Vế trái đpcm

$$bc \leq \frac{(b+c)^2}{4} = (1 - \frac{a}{2})^2 = 1 - a + \frac{a^2}{4} \Rightarrow bc + a - 1 \leq \frac{a^2}{4} \Rightarrow \frac{(1-a)a^2}{4} \leq \frac{1}{27}$$

$$\Rightarrow (3a+1)(3a-2)^2 \geq 0$$

### Bài 22

Cho a, b, c là ba số d-ơng. Chứng minh:

1)  $a^6b^6 + b^6c^6 + c^6a^6 + 3a^4b^4c^4 \geq 2a^3b^3c^3(a^3 + b^3 + c^3)$

2)  $a^6 + b^6 + c^6 + 3a^2b^2c^2 \geq 2(a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3)$

**Giải:**

1) Chia hai vế cho  $\Rightarrow a^4b^4c^4$  Đặt  $x = \frac{a^2}{bc}; y = \frac{b^2}{ac}; z = \frac{c^2}{ab}$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 3 \geq 2(x+y+z)$$

$(\frac{1}{x} - \frac{1}{y})^2 + 2(x-1)(y-1) + (yz-1)^2 \geq 0$ , vì  $xyz = 1$  nên bao giờ cũng tồn tại hai trong ba số x,

y, z cùng lớn hơn 1 hoặc nhỏ hơn 1.

2) T-ơng tự nh- trên chia hai vế cho  $a^2b^2c^2$ ; đặt  $x = \frac{ab}{c^2}; y = \frac{bc}{a^2}; z = \frac{ac}{b^2} \Rightarrow xyz = 1$  sau đó

trở lại nh- 1)

### Bài 23

Cho a, b là các số d-ơng nhỏ hơn 1. Chứng minh  $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$

**Giải:**  $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \sqrt{2\left(\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \leq \frac{2}{1+ab}$

$(2+a^2+b^2)(1+ab) \leq 2(1+a^2+b^2+a^2b^2) \Leftrightarrow a^2+b^2 + 2 a^2b^2 - (a^2+b^2)ab - 2ab \geq 0$

$(ab-1)(a-b)^2 \geq 0$  dấu bằng khi  $a = b$

**Bài 24**

Gọi  $R, r$  là bán kính đ-ờng tròn ngoại, nội tiếp tam giác và  $r_1$  là bán kính đ-ờng tròn qua ba tiếp điểm của đ-ờng tròn nội tiếp với các cạnh tam giác.

Chúng minh:  $2r_1 \leq r \leq \sqrt{Rr_1}$

**Bài 25**

Chúng minh:  $(\sqrt[n]{n!})^2 \geq n \cdot \sqrt[n-1]{(n-1)!} \cdot \sqrt[n+1]{(n+1)!}$  (với  $n$  là các số tự nhiên  $n \geq 2$ )

**Bài 26**

a)  $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$

b)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$

c)  $\frac{b^2 - a^2}{c+a} + \frac{c^2 - b^2}{a+b} + \frac{a^2 - c^2}{b+c} \geq 0$ , hd  $\frac{b^2 - a^2}{c+a} = \frac{b+a}{c+a}((b+c) - (c+a))$

đặt  $u = a+b, v = b+c, z = c+a$

**Bài 27**

Cho  $a, b, c$  là các số thực d-ương có tích bằng 1. Chúng minh:

$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(1+c-\frac{1}{c}) \leq 1$

**Giải:** Đặt  $a = \frac{x}{y}$ ;  $b = \frac{y}{z}$ ;  $c = \frac{z}{x} \Rightarrow abc = xyz$

$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{c}) = (\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y})(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z})(\frac{z}{x}-1+\frac{x}{z}) \leq 1$

$(x+z-y)(y+x-z)(z+x-y) \leq xyz$  trở lại bài toán đơn giản

**Bài 28**

$a, b, c$  là ba cạnh tam giác. Chúng minh  $\frac{a^2 + 2bc}{b^2 + c^2} + \frac{b^2 + 2ac}{a^2 + c^2} + \frac{c^2 + 2ba}{b^2 + a^2} > 3$

**Hớng dẫn :**  $a^2 > (b-c)^2 \Rightarrow a^2 + 2bc > b^2 + c^2$

**Bài 29**

$a, b, c, d$  là các số d-ương và  $\frac{a+b}{c+d} < 2$ . Chúng minh  $\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2} < 8$



**Hình dẫn :**  $(c + d)^2 < 2(c^2 + d^2)$  ,  $(a+b)^2 > a^2 + b^2$

$$\frac{a^2 + b^2}{2(c^2 + d^2)} < \left(\frac{a+b}{c+d}\right)^2 < 4$$

**Bài 30**

$a, b, c > 0$  . Chứng minh:

$$\frac{bc}{a^2 + 2bc} + \frac{ca}{b^2 + 2ca} + \frac{ab}{c^2 + 2ab} \leq 1 \leq \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$$

**Giải:**  $b^2 + c^2 \geq 2bc \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq a^2 + 2bc \Rightarrow \frac{a^2}{a^2 + 2bc} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}$  từ đó:

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geq \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$$

$$VP + 2VT = 3 \Rightarrow 3 = VP + 2VT \geq VT + 2 \Rightarrow VT \leq 1$$

**Bài 31**

Cho  $a, b, c$  là các số thực d-ong. Chứng minh:

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2} \leq 8$$

**Giải:**  $(3 - \frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}) + (3 - \frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}) + (3 - \frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}) \geq 1$

$$\frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(bc-ab-ac)}{2a^2+(b+c)^2} + \frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(ac-ba-bc)}{2b^2+(c+a)^2} + \frac{2(a^2+b^2+c^2)+4(ab-cb-ac)}{2c^2+(a+b)^2} \geq 1$$

1 Sử dụng  $(x+y)^2 \geq 2(x^2+y^2)$

$$VT \geq \frac{6(a^2+b^2+c^2)+4(bc-ab-ac+ac-ab-bc+ab-bc-ac)}{2a^2+2(b^2+c^2)} \geq 1$$

**Bài 32**(đề thi ts Nguyễn Trãi)

Cho  $a, b, c > 0$  ,  $a < bc$  và  $1+a^3 = b^3 + c^3$ . Chứng minh  $1 + a < b + c$

**Giải:**  $(1+a)(1-a+a^2) = (b+c)(b^2-bc+c^2)$

$$1 + a < b + c \Leftrightarrow 1-a+a^2 > b^2 - bc+c^2$$

Giả sử  $1+a \geq b+c \Rightarrow b^2 - bc+c^2 \geq 1-a+a^2 \Rightarrow (b+c)^2 - 3bc \geq (1+a)^2 - 3a > (1+a)^2 - 3bc \Rightarrow$

$$(b+c)^2 > (1+a)^2 \Rightarrow b+c > 1+a$$

**Bài 33**

$a, b, c$  là các số thực d-ong và  $ab + bc + ca = 1$ . Chứng minh:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3(a+b+c)$$

Giải: qui đồng  $\Rightarrow abc(a+b+c) \leq \frac{1}{3}$

$$abc(a+b+c) = (abac+bcba+cacb) \leq \frac{(ab+bc+ca)^2}{3} = \frac{1}{3} \text{ dấu bằng } a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**Bài 34**

Cho các số thực d- ơng a, b, c. Chứng minh:

$$1 < \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Giải:  $P = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+a^2}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$

Với  $x=b/a; y=c/b; z = a/c \Rightarrow xyz = 1$

$P > 1$  dễ dàng

Sử dụng  $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{1+ab}}$  với  $ab < 1$

Giả sử  $z \geq 1 \Rightarrow Q = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+xy}}$  do  $xyz=1$  ; đặt  $t=1/z$

$$\Rightarrow Q = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{2}{\sqrt{1+t}} \leq \frac{\sqrt{2}t}{1+t} + \frac{2}{\sqrt{1+t}} = \frac{\sqrt{2}t}{1+t} + \frac{2\sqrt{1+t}}{1+t}; (1+t \leq \sqrt{2(1+t^2)})$$

$$\frac{\sqrt{2}t}{1+t} + \frac{2\sqrt{1+t}}{1+t} \leq \frac{3\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 2t + 2\sqrt{2(1+t)} \leq 3t + 3 \text{ bình ph- ơng có: } (t-1)^2 \geq 0$$

**Bài 35**

Cho tam giác vuông ABC có cạnh huyền là a và hai cạnh góc vuông là b, c.

Chứng minh  $(b+c)\sqrt{b} + (b-c)\sqrt{c} < \sqrt{2}\sqrt{2}a\sqrt{a}$

Giải:  $b+c \leq \sqrt{(b+c)^2 + (b-c)^2} = \sqrt{2} a$ ;

$$(b+c)\sqrt{b} + (b-c)\sqrt{c} \leq \sqrt{(b+c)^2 + (b-c)^2} \sqrt{b+c} \leq \sqrt{2}a\sqrt{\sqrt{2}a}$$

dấu bằng không xảy ra:  $(b+c) : (b-c) = \sqrt{b} : \sqrt{c} = 1 : 1$

**Bài 35**

$a, b, c \in (0; \pi/2)$  . Chứng minh:

$$\frac{\sin a \sin(a-b) \sin(a-c)}{\sin(b+c)} + \frac{\sin b \sin(b-c) \sin(b-a)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c \sin(c-a) \sin(c-b)}{\sin(a+b)} \geq 0$$

Chứng minh: Giả sử  $a \geq b \geq c$

$$P \geq \frac{\sin a \sin(a-b) \sin(a-c)}{\sin(b+c)} - \frac{\sin b \sin(a-c) \sin(a-b)}{\sin(c+a)} + \frac{\sin c \sin(a-c) \sin(b-c)}{\sin(a+b)} =$$

**Bài 36**

Sử dụng định lý Lagrăng ( $f(x)$  liên tục  $[a; b]$  và có đạo hàm  $(a; b) \Rightarrow$  tồn tại  $c \in (a; b)$  thoả mãn  $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

Chứng minh rằng  $x = 5$  không là nghiệm bất phương trình:

$$\sin(x+1) \sqrt[3]{\cos x} - \sin x \sqrt[3]{\cos(x+1)} < \sqrt[3]{\cos x \cos(x+1)}$$

Giải:  $\frac{\sin(x+1)}{\sqrt[3]{\cos(x+1)}} - \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} < 1$ , xét hàm số  $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt[3]{\cos t}}$ ,  $f'(x) = \frac{2 \cos^2 x + 1}{3 \cos x \sqrt[3]{\cos x}}$

áp dụng bất Cosi  $\Rightarrow f'(x) > 1 \Rightarrow f(x+1) - f(x) > 1$

**Bài 37**

$$\sin x \sqrt[3]{\cos(x-1)} - \sin(x-1) \sqrt[3]{\cos x} > \sqrt[3]{\cos x \cos(x-1)}$$

Chứng minh rằng  $x = e$  là nghiệm của bất phương trình

Giải  $\pi > e$ ;  $e-1 > 1$ ,  $71828 > \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin e > 0$ ;  $\sin(e-1) > 0$ ;  $\cos e < 0$ ;  $\cos(e-1) < 0$

$$f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt[3]{\cos t}}; (e-1; e) \subset (\frac{\pi}{2}; \pi); f(e)-f(e-1) > 1$$

Phương pháp dồn biến

Để chứng minh  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$  ta đưa về

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n)$$

Hoặc  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq f(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n)$

chứng minh  $f(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, x_3, \dots, x_n) \geq 0$  hoặc  $f(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, x_3, \dots, x_n) \geq 0$

Bài 36:  $a, b, c > 0$  và  $abc = 1$

Chứng minh  $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq ab + bc + ca + a + b + c$

Giải:  $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 + 3 - (ab + bc + ca + a + b + c)$

$$f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 [(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - a - 1]$$

$$(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \geq 4\sqrt{bc} = \frac{4}{\sqrt{a}} \geq 4 > 1 + a$$

Chứng minh  $f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) \geq 0$ ;  $a^2 + (\frac{1}{\sqrt{a}} - 1)^2 + 2 \geq a + 2\sqrt{a}$

$$a^2 + 2 \geq 2a + 1 \geq a + 2\sqrt{a}$$

Bài 37: Cho  $a, b, c$  là các số dương. Chứng minh

$$2(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} \geq (a + b + c)^2$$

Xét  $f(a, b, c) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} - (a + b + c)^2$ , giả sử  $a \leq b \leq c$

$$f(a, b, c) - f(a, \sqrt{bc}, \sqrt{bc}) = 2(a^2 + b^2 + c^2) + 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} - (a + b + c)^2 -$$

$$2(a^2 + 2bc) - 3\sqrt[3]{a^2 b^2 c^2} + (a + 2\sqrt{bc})^2 = (\sqrt{b} - \sqrt{c})^2 [(\sqrt{b} + \sqrt{c})^2 - 2a]$$

dễ dàng chứng minh  $b + c \geq 2a$

Chứng minh:  $2(a^2 + 2bc) + 3\sqrt{a^2b^2c^2} - (a + 2\sqrt{bc})^2 \geq 0$

$a^2 + 3\sqrt{a^2b^2c^2} \geq 4a\sqrt{bc}$  (cosi cho 4 số)