



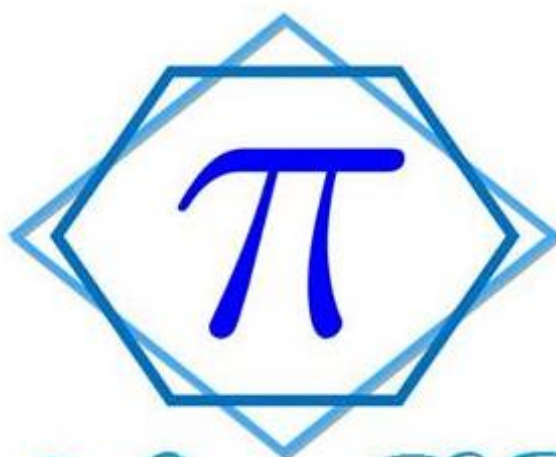
Nhóm PI

Tổng hợp câu hỏi trắc nghiệm hay môn Toán

Nguyễn Quang Hưng – Nguyễn Thành Tiến

Phần Giải tích 12

- Khảo sát hàm số
- Hàm số lũy thừa, hàm mũ, hàm lôgarit
- Nguyên hàm – Tích phân - Ứng dụng
- Số phức



Nhóm PI
facebook.com/groups/nhompi

Năm 2017 – Tháng 5 – Ngày 5 – Thứ sáu

TOANMATH.com

Lời mở đầu

Đây là tài liệu đầu tiên do các thành viên NHÓM PI thực hiện .

Các bài tập được trích trong đây chủ yếu là những bài được lấy trong các đề thi thử, bài giải được làm dưới cách chi tiết, nên có một số chỗ dài hơn so với bình thường .

Nếu mọi người ai có góp ý gì về bài giải hay phát hiện sai sót nào trong tài liệu thì xin đưa lên ý kiến trong group NHÓM PI .

Link group : <https://www.facebook.com/groups/NhomPI/>

Dẫu đã cố gắng làm rất cẩn thận nhưng khó tránh khỏi sai sót, mong các bạn thông cảm .

Cảm ơn các bạn đã đọc tài liệu .

Mục lục

Chương 1	4
Chương 2	19
Chương 3	27
Chương 2	33

Chương 1 : Khảo sát hàm số

Câu 1 : Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($ad - cb \neq 0$) . Biết hàm số nhận $I(3;2)$ làm tâm đối xứng và đi qua điểm $A(1;1)$. Tìm tung độ của điểm có hoành độ bằng 2 là :

A. 1

B. 2

C. 0

D. đáp án khác

Giải :

ta có TĐĐ : $x = \frac{-d}{c}$, TCN : $y = \frac{a}{c}$. Do $I(3;2)$ là TĐĐ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{-d}{c} = 3 \\ \frac{a}{c} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = -\frac{3}{2}a \\ c = \frac{1}{2}a \end{cases}$.

Hàm số đi qua $A(1;1) \Rightarrow 1 = \frac{a+b}{\frac{1}{2}a - \frac{3}{2}a} \Leftrightarrow b = -2a$. Tung độ $x = 2 \Rightarrow y = 0$.

Câu 2 : Cho hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ (C) và đường thẳng $d : y = 2x - m$. Định m để $d \cap (C)$ tại 2 điểm phân biệt ở 2 nhánh khác nhau .

A. $m < 0$

B. $m \geq 0$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. đáp án khác

Giải :

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và d :

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2x - m \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ 2x+1 = (2x-m)(x-1) \end{cases} (1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (m+4)x + m - 1 = 0 \quad (*) \quad (\text{do } x=1 \text{ không phải nghiệm của (1)}) .$$

Để (C) $\cap$ d tại hai điểm phân biệt $\Delta_{(*)} = m^2 + 4m + 20 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (C) \cap d$ tại 2 điểm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$

Ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m+4}{2} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m-1}{2} \end{cases}$. Khi (C) $\cap$ d tại 2 điểm phân biệt thuộc 2 nhánh đồ thị thì ta có :

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-3}{2} < 0 \text{ đúng } \forall m \in \mathbb{R} .$$

Câu 3 : Cho hàm số sau : $y = \frac{2x-1}{|x^2-1|-m}$. Định m để hàm số có 5 tiệm cận :

A. $0 < m < 1$

B. $0 \leq m < 1$

C. $0 < m \leq 1$

D. đáp án khác

Giải :

Vì đây là hàm phân thức nếu có 5 tiệm cận $\Rightarrow$ Mẫu có 4 nghiệm phân biệt khác $\frac{1}{2} \Rightarrow m \neq \frac{3}{4}$

Ta có : $\begin{cases} |x^2 - 1| = m \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 2x^2 + 1 = m^2 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 1 \\ m \neq \frac{3}{4} \end{cases} .$

Câu 4 : Hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2} + x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang :

A. 3

B. 2

C. 4

D. 1

Giải :

Tập xác định : $D = [-2; 2)$.

Từ tập xác định $\Rightarrow y$ không có tiệm cận ngang .

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{\sqrt{4-x^2} + x - 2}{(x-3)(x-2)(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{\sqrt{2-x}(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{(x-3)(x-2)(x+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left[\frac{-(\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x})}{(x-3)\sqrt{2-x}(x+1)} \right] = +\infty .$$

$\Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng của hàm số .

$$\text{Xét } \lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{\sqrt{4-x^2} + x - 2}{(x-3)(x-2)(x+1)} \right] = +\infty .$$

$\Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng của hàm số .

Vậy Hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x^2} + x - 2}{x^3 - 4x^2 + x + 6}$ có 2 tiệm cận đứng .

Câu 5 : Biết $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$:

A. $y(-2) = 2$.

B. $y(-2) = 22$.

C. $y(-2) = 6$.

D. $y(-2) = -18$

Giải :

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì $M(0; 2)$, $N(2; -2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad (1) ; \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 1; b = -3; c = 0; d = 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18$.

Câu 6 : Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + ab}{ax + b}$ ($a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$) . Tồn tại duy nhất 1 cặp (a, b) duy nhất để hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 1$. Tính $P = (a + b + ab)^2$.

A. $\frac{16}{81}$

B. $\frac{9}{64}$

C. $\frac{16}{121}$

D. $\frac{9}{49}$

Giải :

$$y' = \frac{a^2x^2 + 2abx + (b^2 - a^2b)}{(ax + b)^2} .$$

Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $x = 1$.

$$\begin{cases} y'(0)=0 \\ y'(1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b^2 - a^2 b}{b^2} = 0 \\ \frac{a^2 + 2ab + b^2 - a^2 b}{(a+b)^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a \neq -b \\ b^2 - a^2 b = 0 \\ a^2 + 2ab + b^2 - a^2 b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b \neq 0 \\ a \neq -b \\ b - a^2 = 0 \\ a^2 + 2ab = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Kiểm lại ta thấy $\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{4} \end{cases}$ thỏa $\Rightarrow p = (ab + a + b)^2 = \frac{9}{64} \Rightarrow$ chọn B.

Câu 8: Cho $f(x) = \sqrt{-x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{377}{36}} - \sqrt{-x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}}$. Gọi $\max f(x) = a$, $\min f(x) = b$. Tính

$$P = a^2 + b^2.$$

A. $\frac{85}{6}$

B. $\frac{85}{9}$

C. $\frac{85}{8}$

D. $\frac{85}{7}$

Giải :

Điều kiện : $\begin{cases} -x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{377}{36} \geq 0 \\ -x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq \frac{7}{3}.$

$$f(x) = \sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{4}{3}\right)^2} - \sqrt{\frac{25}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}.$$

Xét $x \in \left(-1; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow f'(x) = \frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)^2}{\sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{4}{3}\right)^2}} - \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)^2}{\sqrt{\frac{25}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}}.$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{4}{3}\right)^2}} - \frac{\left(x - \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{25}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{4}{3}\right) \sqrt{\frac{25}{9} - \left(x - \frac{2}{3}\right)^2} = \left(x - \frac{2}{3}\right) \sqrt{\frac{49}{4} - \left(x - \frac{4}{3}\right)^2} \\ x \in \left(-1; \frac{7}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
& \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \left[\frac{25}{9} - \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 \right] = \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 \left[\frac{49}{4} - \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 \right] \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-1; \frac{7}{3} \right) \\ \left(x - \frac{4}{3} \right) \left(x - \frac{2}{3} \right) \geq 0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{25}{9} \left(x - \frac{4}{3} \right)^2 = \frac{49}{4} \left(x - \frac{2}{3} \right)^2 \\ x \in \left(-1; \frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{4}{3}; \frac{7}{3} \right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} . \\
& \Rightarrow \begin{cases} f(-1) = \frac{7\sqrt{5}}{6} \\ f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\sqrt{105}}{6} \\ f\left(\frac{7}{3}\right) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = \frac{3\sqrt{5}}{2} \\ \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = \frac{\sqrt{105}}{6} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{85}{9} .
\end{aligned}$$

Câu 9 : Cho $m \in \mathbb{R}$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R} (\alpha < \beta)$ là 2 nghiệm của phương trình $4x^2 - 4mx - 1 = 0$. Xét hàm số

$$f(x) = \frac{2x - m}{x^2 + 1} . \text{ Tìm giá trị nhỏ nhất của } g(m) = \left(\max_{[\alpha; \beta]} f(x) - \min_{[\alpha; \beta]} f(x) \right) (16m^2 + 25) .$$

A. 40

B. 80

C. 120

D. Cả A, B, C đều sai

Giải :

$$\text{Phương trình } 4x^2 - 4mx - 1 = 0 \text{ luôn có 2 nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{m - \sqrt{m^2 + 1}}{2} \\ \beta = \frac{m + \sqrt{m^2 + 1}}{2} \end{cases} .$$

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{2x - m}{x^2 + 1} \Rightarrow f'(x) = \frac{-2x^2 + 2mx + 2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-\frac{1}{2} \overbrace{(4x^2 - 4mx - 1)}^0 + \frac{3}{2}}{(x^2 + 1)^2} > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ là hàm đồng biến trên } \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} \max_{[\alpha; \beta]} f(x) = f(\beta) \\ \min_{[\alpha; \beta]} f(x) = f(\alpha) \end{cases} .$$

$$\Rightarrow \frac{g(m)}{16m^2 + 25} = \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{\left(\frac{m + \sqrt{m^2 + 1}}{2} \right)^2 + 1} + \frac{\sqrt{m^2 + 1}}{\left(\frac{m - \sqrt{m^2 + 1}}{2} \right)^2 + 1}$$

$$= \left(\frac{4\sqrt{m^2+1}}{2m^2+5+2m\sqrt{m^2+1}} + \frac{4\sqrt{m^2+1}}{2m^2+5-2m\sqrt{m^2+1}} \right)$$

$$= 4\sqrt{m^2+1} \left[\frac{4m^2+10}{(2m^2+5+2m\sqrt{m^2+1})(2m^2+5-2m\sqrt{m^2+1})} \right] = \frac{8(2m^2+5)\sqrt{m^2+1}}{16m^2+25}$$

$$\Rightarrow g(m) = 8(2m^2+5)\sqrt{m^2+1} \Rightarrow \min g(m) = 40.$$

Câu 10 : Tìm m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \geq \frac{5}{2}$

B. $m \leq \frac{5}{4}$

C. $m \geq \frac{5}{4}$

D. $m \leq \frac{5}{2}$

Giải :

$$y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-\sin x + m}{-\sin^2 x + 1} \text{ với } x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$$

Đặt $\sin x = t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, ta có: $y_1 = \frac{-t + m}{-t^2 + 1} \Rightarrow y_1' = \frac{-t^2 + 2mt - 1}{(t^2 - 1)^2}$.

Hàm số y nghịch biến trên $\left(0, \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$ hàm số y_1 nghịch biến trên $\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

$$\Leftrightarrow y_1' \leq 0 \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0 \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t} \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Xét hàm số $y_3 = \frac{t^2 + 1}{2t}$ trên $\left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow y_3' = \frac{2t^2 - 2}{4t^2} < 0 \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$.

Vậy $y_3 > y_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \forall t \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 11 : Trên đoạn $[1; 4]$, các hàm số $f(x) = x^2 + px + q$; $g(x) = x + \frac{4}{x^2}$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm. Tìm giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên đoạn này.

A. $\max f(x) = 7$

B. $\max f(x) = 5$

C. $\max f(x) = 6$

D. $\max f(x) = 8$

Giải :

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM, ta được: $g(x) = x + \frac{4}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{4}{x^2} \geq 3$

Suy ra: $g(x)_{\min} = 3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$

Ta có: $f'(x) = 2x + p$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + p = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{p}{2}$

Do $f(x)$ và $g(x)$ có cùng giá trị nhỏ nhất và đạt tại cùng một điểm trên đoạn $[1; 4]$, nên ta có:

$$\begin{cases} f(2) = 3 \\ -\frac{p}{2} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2p + q = 3 \\ p = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 7 \\ p = -4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 7$$

Nhận thấy: $\min f(x) = f(2)$ nên $\max f(x) = \{f(1); f(4)\}$. Và $\begin{cases} f(1) = 4 \\ f(4) = 7 \end{cases} \Rightarrow \max f(x) = 7$

Vậy $\max f(x) = 7$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 4$.

Câu 12 : Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Giả sử đường thẳng AB cũng đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

- A. -9 B. $-\frac{25}{9}$ C. $-\frac{16}{25}$ D. 1

Giải :

Ta có phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ là :

$$f(x) = \frac{2}{3} \left(b - \frac{2a^2}{9} \right) x + c - \frac{ab}{9} \Rightarrow (AB): y = \frac{2}{3} \left(b - \frac{2a^2}{9} \right) x + c - \frac{ab}{9}.$$

Do (AB) đi qua gốc tọa độ $O(0;0) \Rightarrow ab = 9c$.

Thay vào $P = 9c^2 + 10c \geq \left(3c + \frac{5}{3} \right)^2 - \frac{25}{9} \geq -\frac{25}{9}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $c = -\frac{5}{9}$.

Câu 13 : Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 2\cos x$ trên $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của y . Tính $P = M + m$.

- A. $P = 4\pi$ B. $P = 4\pi^2$ C. $P = 4(\pi^2 + 1)$ D. $P = 4(\pi^2 + 2)$

Giải :

$$\text{Xét } f(x) = x^2 + 2\cos x \left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 2(x - \sin x).$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2(1 - \cos x) \geq 0 \left(\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] \right)$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ là hàm đồng biến trên } \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi \right] \Rightarrow f'(x) \text{ có tối đa một nghiệm.}$$

Ta thấy $f'(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất của $f'(x)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4} \\ f(0) = 2 \\ f(2\pi) = 4\pi^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]} f(x) = m = f(0) = 2 \\ \max_{x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]} f(x) = M = f(2\pi) = 4\pi^2 + 2 \end{cases} \Rightarrow P = 4(\pi^2 + 1).$$

Câu 14 : Cho hàm số $f(x) = a \sin x + b\sqrt[3]{x} + 2016$. Cho biết $f(\log(\log_3 10)) = 2017$. Tính $f(\log(\log 3))$.

- A. $f(\log(\log 3)) = 2018$ C. $f(\log(\log 3)) = 2016$

B. $f(\log(\log 3)) = 2017$

D. $f(\log(\log 3)) = 2015$

Giải :

Ta có: $f(\log(\log 3)) = f\left(\log\left(\frac{1}{\log_3 10}\right)\right) = f(-\log(\log_3 10))$

$$= a \sin(-\log(\log_3 10)) + b \sqrt[3]{-\log(\log_3 10)} + 2016$$

$$= -\left(a \sin(\log(\log_3 10)) + b \sqrt[3]{\log(\log_3 10)} + 2016\right) + 4032$$

$$= -f(\log(\log_3 10)) + 4032 = -2017 + 4032 = 2015$$

Vậy $f(\log(\log 3)) = 2015$.

Câu 15 : Cho hàm số $(C_m): y = \frac{2x^2 - (m-2)x + m}{x - m + 1}$ ($m \neq 0$). Biết với mọi $m \neq 0$ thì (C_m) luôn tiếp xúc với 1 đường thẳng cố định d . Vậy d là :

A. $d: y = x - 1$

B. $d: y = x + 1$

C. $d: y = x + 2$

D. $d: y = x - 2$

Giải :

Do may mắn nên (C_m) luôn đi qua điểm cố định $A(-1; -2)$ với $\forall m \neq 0$.

$\Rightarrow$ Tiếp tuyến chung có tiếp điểm là $A(-1; -2)$.

Ta mò điểm cố định đó như sau :

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (C_m) luôn đi qua. Nên từ đó ta có :

$$y_0 = \frac{2x_0^2 - (m-2)x_0 + m}{x_0 - m + 1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y_0 - x_0 + 1)m + 2x_0^2 + 2x_0 - (x_0 + 1)y_0 = 0 \\ x_0 \neq m - 1 \end{cases}$$

Để phương trình trên luôn có nghiệm thì :

$$\Rightarrow \begin{cases} (y_0 - x_0 + 1) = 0 \\ 2x_0^2 + 2x_0 - (x_0 + 1)y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ 2x_0^2 + 2x_0 - (x_0 + 1)(x_0 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = x_0 - 1 \\ (x_0 + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases} \Rightarrow A(-1; -2)$$

Từ đây có thể kết luận $y = x - 1$ là tiếp tuyến và tiếp điểm là $A(-1; -2)$ do hệ có nghiệm kép.

Ta chứng minh bằng pp tự luận sau :

Theo lớp 11 thì hệ số góc k của tiếp tuyến tại x_0 chính là $y'(x_0)$.

Ta tính $y' = \frac{2x^2 + 4(1-m)x + m^2 - 4m + 2}{(x - m + 1)^2} \Rightarrow y'(-1) = \frac{m^2}{m^2} = 1$ (may mắn quá)

$\Rightarrow d: y = x - 1$.

Câu 16 : Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{x^2+1}$. Khi hàm số y có giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1 thì giá trị của $P = a^2 + b^2$ là :

A. $P = 13$

B. $P = 20$

C. $P = 25$

D. $P = 34$

Giải :

$$\text{Khi } \max y = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y \leq 4 \\ \exists x_1 \in \mathbb{R}, y(x_1) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \leq 4 \\ \frac{ax_1+b}{x_1^2+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - ax + 4 - b \geq 0 \\ 4x_1^2 - ax_1 + 4 - b = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Để hệ có nghiệm thì } \begin{cases} \Delta = a^2 - 16(4-b) \leq 0 \\ \Delta_1 = a^2 - 16(4-b) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 = a^2 - 16(4-b) = 0 \quad (1).$$

$$\text{Khi } \min y = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}, y \geq -1 \\ \exists x_2 \in \mathbb{R}, y(x_2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{ax+b}{x^2+1} \geq -1 \\ \frac{ax_2+b}{x_2^2+1} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + ax + b + 1 \geq 0 \\ x_2^2 + ax_2 + b + 1 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Để hệ có nghiệm thì } \begin{cases} \Delta' = a^2 - 4(b+1) \leq 0 \\ \Delta_2 = a^2 - 4(b+1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta_2 = a^2 - 4(b+1) = 0 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - 16(4-b) = 0 \\ a^2 - 4(b+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow P = 25.$$

Câu 17 : Cho hàm số $f(x) = |\cos 2x + a \cos x + 2017|$ với a là tham số thực. Gọi a_0 là giá trị để $T = \max f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị T là :

A. $T = 2016$

B. $T = 2017$

C. $T = 2018$

D. $T = 2019$

Giải :

Ta có :

$$\text{Nếu } a > 0 : f(0) = |a + 2018| = a + 2018 > 2018 \Rightarrow M > 2018.$$

$$\text{Nếu } a < 0 : f(\pi) = |2018 - a| = 2018 - a > 2018 \Rightarrow M > 2018.$$

$$\text{Nếu } a = 0 : f(x) = |\cos 2x + 2017| \leq |\cos 2x| + 2017 \leq 2018 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Mà } f(0) = 2018 \Rightarrow T = \max f(x) = 2018.$$

$$\Rightarrow T \geq 2018 \quad (\forall a \in \mathbb{R}). \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } a = 0.$$

Câu 18 : Cho $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$. Số nghiệm thực của phương trình $f(f(x)) = 0$.

A. 9

B. 8

C. 7

D. 6

Giải :

$$f(x) = 0 \text{ ta thấy có 3 nghiệm } \Rightarrow \begin{cases} x = 2,810... = A \\ x = 0,8317... = B \\ x = -0,64... = C \end{cases}$$

$$f(f(x)) = 2[f(x)]^3 - 6[f(x)]^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = A \\ f(x) = B \\ f(x) = C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6x^2 + 3 - A = 0 \\ 2x^3 - 6x^2 + 3 - B = 0 \\ 2x^3 - 6x^2 + 3 - C = 0 \end{cases}.$$

Ta có :

$$\begin{aligned} \bullet \quad 2x^3 - 6x^2 + 3 - A = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,98... \\ x = 0,18... \\ x = -0,17... \end{cases} \\ \bullet \quad 2x^3 - 6x^2 + 3 - B = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,86.. \\ x = 0,68.. \\ x = -0,55.. \end{cases} \\ \bullet \quad 2x^3 - 6x^2 + 3 - C = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,76.. \\ x = 0,94.. \\ x = -0,70.. \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy phương trình $f(f(x)) = 0$ có 9 nghiệm thực phân biệt .

Câu 19 : Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2}$. Phương trình $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1} = 1$ có bao nhiêu nghiệm thực phân biệt .

A. 5

B. 6

C. 7

D. 9

Giải :

Điều kiện : $2f(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \neq \frac{1}{2}$.

Ta có : $\frac{f(f(x))}{2f(x)-1} = 1 \Rightarrow f(f(x)) = 2f(x) - 1$

$$[f(x)]^3 - 3[f(x)]^2 + f(x) + \frac{3}{2} = 2f(x) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 3,059... = A \\ f(x) = 0,845... = B \\ f(x) = -0,934... = C \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2} - A = 0 \quad (1) \\ x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2} - B = 0 \quad (2) \\ x^3 - 3x^2 + x + \frac{3}{2} - C = 0 \quad (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2,841... \\ x = 2,499... \\ x = 0,809... \\ x = -0,309... \\ x = -0,688... \end{cases} \Rightarrow \text{Phương trình có 5 nghiệm phân biệt .}$$

Câu 20 : Phương trình $x^3 + x(x+1) = m(x^2 + 1)^2$ có nghiệm thực khi đó tập giá trị m thỏa là :

A. $m \in \left[-6; \frac{-3}{2}\right]$

B. $m \in [-1; -3]$

C. $m \in [3; +\infty)$

D. $m \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$

Giải :

Với $x = 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm khi $m = 0$.

Với $x \neq 0$:

$$\text{Ta có : } x^3 + x^2 + x = m(x^2 + 1)^2 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) + x^2 = m(x^2 + 1)^2 .$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = m \quad (*) .$$

$$\text{Ta có : } \left|\frac{x}{x^2 + 1}\right| \leq \left|\frac{x}{2|x|}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} .$$

$$\text{Đặt } t = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \left(t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) \Rightarrow (*) \text{ trở thành } t^2 + t = m \quad \left(t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]\right) .$$

$$\text{Xét : } f(t) = t^2 + t \text{ với } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq f(t) \leq \frac{3}{4} \text{ với } t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] .$$

$$\text{Vậy tóm lại để phương trình có nghiệm có khi } m \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right] .$$

Câu 21 : Cho phương trình $x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$ (*) với $m \in \mathbb{R}$ là tham số. Tìm tất cả giá trị của m để (*) có đúng hai nghiệm thực thuộc đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

$$\text{A. } 2 < m \leq \frac{5}{2}$$

$$\text{B. } \frac{11}{5} < m < 4$$

$$\text{C. } \frac{7}{5} \leq m < 3$$

$$\text{D. } 0 < m < \frac{9}{2}$$

Giải :

$$\text{Ta có : } x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + (15 - 3m^2)x^2 - 6mx + 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 12x^2 + 8 + 3x^2 + 6 = m^3x^3 + 3m^2x^2 + 6mx + 4$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) = (mx + 1)^3 + 3(mx + 1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2 = mx + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 = mx \Leftrightarrow m = \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow \text{A} .$$

Câu 22 : Cho hàm số $y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m + 2}{x - 2} \right|$. Tìm m thuộc khoảng nào sau đây để giá trị nhỏ nhất của hàm số y trên $[-1; 1]$ đạt nhỏ nhất :

$$\text{A. } m \in (-2; -1)$$

$$\text{B. } m \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right)$$

$$\text{C. } m \in (-1; 0)$$

$$\text{D. } m \in (-1; 1)$$

Giải :

$$y = \left| \frac{x^2 - (m+1)x + 2m + 2}{x - 2} \right| = \left| \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} - m \right| . \text{ Đặt } f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 2} \text{ với } \forall x \in [-1; 1] .$$

$$f'(t) = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2} \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ x \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow f(x) \in [-2; -1] .$$

Vậy bài toán trở thành $y = f(t) = |t - m| \quad \forall t \in [-2; -1]$.

Ta phải tìm m để $\max_{t \in [-2; -1]} f(t)$ đạt giá trị nhỏ nhất .

$$\text{Ta có } \max_{t \in [-2; -1]} f(t) = \max_{t \in [-2; -1]} \{f(-2); f(-1)\} = \max_{t \in [-2; -1]} \{|m+2|; |m+1|\} .$$

- $|m+2| \geq |m+1| \Leftrightarrow m \geq \frac{-3}{2} \Rightarrow \max_{t \in [-2; -1]} f(t) = |m+2| = m+2 \geq \frac{1}{2} \left(\forall m \geq \frac{-3}{2} \right)$
- $|m+2| \leq |m+1| \Leftrightarrow m \leq \frac{-3}{2} \Rightarrow \max_{t \in [-2; -1]} f(t) = -(m+1) \geq \frac{1}{2} \left(\forall m \leq \frac{-3}{2} \right) .$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\max_{t \in [-2; -1]} f(t)$ là $\frac{1}{2}$, dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{-3}{2}$.

Câu 23 : Cho $y = x^4 - 6x^2 + 4x$. Gọi (C) là đường tròn đi qua 3 điểm cực trị của y . Biết (C) giao $d: 3x + y = 0$ tại 2 điểm $A(x_A; y_A); B(x_B; y_B)$. Tính $x_A + y_A + x_B + y_B$.

A. $\frac{\sqrt{3}-5}{3}$

B. $\frac{-11}{5}$

C. $\frac{\sqrt{2}+7}{5}$

D. $\frac{-17}{5}$

Giải :

$y' = 4x^3 - 12x + 4$. Ta thấy $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Có 3 điểm cực trị .

Gọi $M(x_o; y_o)$ là điểm cực trị bất nào đó $\odot \Rightarrow 4x_o^3 - 12x_o + 4 = 0 \Leftrightarrow x_o^3 = 3x_o - 1$.

Ta có : $y_o = x_o^4 - 6x_o^2 + 4x_o = x_o(3x_o - 1) - 6(3x_o - 1) + 4x_o$.

$\Leftrightarrow y_o = -3x_o^2 + 3x_o \Rightarrow 3$ điểm cực trị nằm trên 1 Parabol $\Rightarrow$ không thẳng hàng .

Mặt khác : $y_o = -3x_o^2 + 3x_o \Rightarrow (y_o)^2 = (-3x_o^2 + 3x_o)^2$

$$\Leftrightarrow y_o^2 = 9x_o^4 - 18x_o^3 + 9x_o^2 = 9x_o(3x_o - 1) - 18(3x_o - 1) + 9x_o^2 =$$

$$y_o^2 = 36x_o^2 - 63x_o + 18$$

$$\Rightarrow x_o^2 + y_o^2 = 37x_o^2 - 63x_o + 18$$

$$\Leftrightarrow x_o^2 + y_o^2 = 37\left(\frac{3x_o - y_o}{3}\right) - 63x_o + 18$$

$$\Leftrightarrow x_o^2 + y_o^2 + 26x_o + \frac{37}{3}y_o - 18 = 0$$

Vậy 3 điểm cực trị thuộc đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 26x + \frac{37}{3}y - 18 = 0$.

$$(C) \cap d \Rightarrow \begin{cases} A(2; -6) \\ B\left(\frac{-9}{10}; \frac{27}{10}\right) \Rightarrow B. \end{cases}$$

Câu 24: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ và điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đó, đặt góc $CAB = \alpha$ và gọi H là hình chiếu vuông góc của C trên AB . Tìm α sao cho thể tích vật thể tròn xoay tạo thành khi quay tam giác ACH quanh trục AB đạt giá trị lớn nhất.

- A. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Giải:

Gọi O là trung điểm của AB .

Xét trục AOB với O là gốc thì ta có: $A(-R, 0), B(R, 0)$

$H \in \text{đoạn } AB \Rightarrow H(x, 0)$ với $x \in [0, R]$.

Ta có $AH = |-R - x| = R + x, HB = |R - x| = R - x$.

$$\Rightarrow HC^2 = HA \cdot HB = R^2 - x^2.$$

Mà $V = \frac{1}{3} \pi \cdot AH \cdot HC^2$ nên $V(x) = \frac{\pi}{3} \cdot (R + x) \cdot (R^2 - x^2) \Rightarrow V'(x) = \frac{\pi}{3} \cdot [R^2 - x^2 + (R + x) \cdot (-2x)]$.

$$V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R + x = 0 \text{ (Loại)} \\ R - x - 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{R}{3}.$$

$$\tan \alpha = \frac{HC}{HA} = \frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R + x} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \text{C}.$$

Câu 26: Trang giấy in là hình chữ nhật, diện tích phần chữ (hình chữ nhật) là $468,75 \text{ cm}^2$, lề 2 bên là $1,5 \text{ cm}$, lề trên đỉnh và đáy là 2 cm . Chu vi khổ giấy là bao nhiêu khi dung lượng giấy ít nhất.

- A. $101,5 \text{ cm}$ B. $50,75 \text{ cm}$ C. $43,75 \text{ cm}$ D. $87,5 \text{ cm}$

Giải:

Gọi a, b lần lượt là chiều dài và chiều rộng của phần chữ:

$$\Rightarrow \begin{cases} ab = 468,75 \\ P = (a + 4)(b + 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{468,75}{a} \\ P = 3a + \frac{1875}{a} + 480,75 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow P'(a) = 3 - \frac{1875}{a^2} \Rightarrow P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 25.$$

Vậy để tiết kiệm giấy nhất thì $\begin{cases} a = 25 \\ b = 18,75 \end{cases} \Rightarrow \text{Chu vi nhỏ nhất là } 2[(a + 3) + (b + 4)] = 101,5 \text{ (cm)}.$

Câu 27: Cho tam giác đều ABC cạnh a . Dựng hình chữ nhật $MNEF$ có cạnh MN nằm trên cạnh BC , hai đỉnh E, F lần lượt trên cạnh AC, AB . Tồn tại M để S_{MNEF} max. Tính S_{MNEF} max.

- A. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{16}$ B. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$ C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ D. đáp án khác

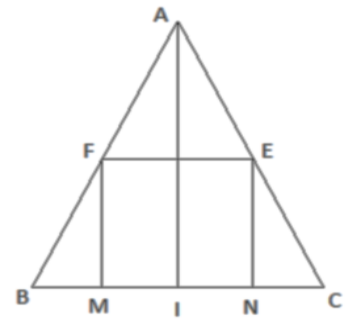
Giải:

Ta có : $MNEF$ là hình chữ nhật $\Rightarrow EF \parallel BC$ (MN) .

Gọi I là trung điểm của BC .

Đặt $\frac{AF}{AB} = x \Rightarrow \frac{BF}{AB} = 1-x$. Ta có $MN = EF = xBC$, $ME = (1-x)AI$.

$$\Rightarrow S = x(1-x)AI \cdot BC = x(1-x) \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 = \left[-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \right] \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 .$$



Câu 28 : Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài $12cm$ và chiều rộng $8cm$. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm với đáy như hình vẽ . Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu :

A. $6\sqrt{3}$

B. $6\sqrt{2}$

C. 6

D. $6\sqrt{5}$

Giải :

Gọi các điểm như hình bên, với N là hình chiếu của M trên CD .

Ta có $\triangle MEB = \triangle MEF$ nên $EB = EF = x$.

Mà $\triangle CEF$ vuông tại C nên $EF > EC \Rightarrow EB > EC$.

$$\Rightarrow \frac{BC}{2} < EB < BC \Rightarrow 4 < x \leq 8 .$$

$$EB = x \Rightarrow EC = 8 - x \Rightarrow CF = \sqrt{x^2 - (8-x)^2} = \sqrt{16x - 64} .$$

Vì

$$EFM = 90^\circ \Rightarrow MFN + EFC = 90^\circ \Rightarrow MFN = FEC \Rightarrow \triangle MFN \sim \triangle FEC .$$

$$\Rightarrow \frac{MF}{FE} = \frac{MN}{FC} \Leftrightarrow \frac{MF}{x} = \frac{8}{\sqrt{16x-64}} \Rightarrow MF = \frac{2x}{\sqrt{x-4}} .$$

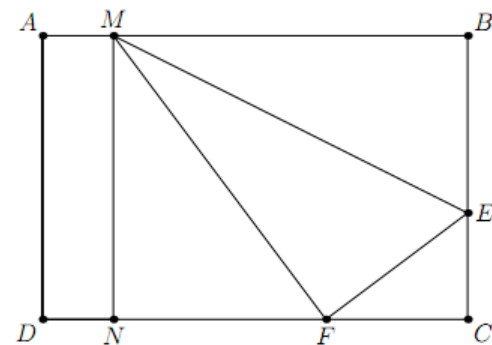
$$\triangle MEF \text{ vuông tại } F \Rightarrow ME^2 = FE^2 + FM^2 = x^2 + \frac{4x^2}{x-4} = \frac{x^3}{x-4} .$$

Xét hàm số $y = \frac{x^3}{x-4}$ với $x \in (4; 8]$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{2x^3 - 12x^2}{(x-4)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(l) \\ x = 6(n) \end{cases} .$$

Vẽ bảng biến thiên ta thấy tại $x = 6$ thì y sẽ có giá trị nhỏ nhất là 108 .

$$\text{Khi đó } ME^2 = 108 \Rightarrow ME = 6\sqrt{3} .$$



Câu 29 : Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $AD = 3$. Trên tia AB lấy điểm E , CE cắt tia AD tại F . Tính giá trị nhỏ nhất của đoạn EF .

A. $EF_{\min} = \frac{8\sqrt{3}}{5}$

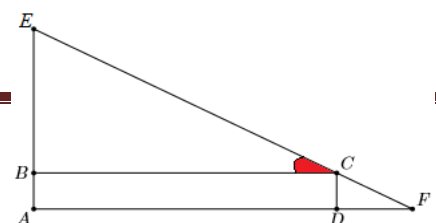
B. $EF_{\min} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

C. $EF_{\min} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$

D. $EF_{\min} = \frac{4\sqrt{21}}{5}$.

Giải :

Gọi góc $BCE = \alpha$. Do CE luôn cắt tia AD nên E di chuyển trên tia AB sao cho B nằm giữa A, E .



$$\Rightarrow DCF = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \begin{cases} CE = \frac{3}{\sin \alpha} \\ CF = \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha} \end{cases} \Leftrightarrow EF = \frac{3}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha}.$$

$$\text{Đặt } y = f(\alpha) = \frac{3}{\sin \alpha} + \frac{1}{\sqrt{3} \cos \alpha} \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right) \Rightarrow y' = \frac{3 \cot \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\tan \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha}.$$

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \cot \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\tan \alpha}{\sqrt{3} \cos \alpha} = 0 \Leftrightarrow \tan^3 \alpha = 3\sqrt{3} \Leftrightarrow \tan \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

α	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y'		- 0 +	
y		$\frac{8\sqrt{3}}{3}$	

Vậy dựa vào bảng biến thiên ta có :

$$\min_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Tổng quát hoá bài toán : Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AB = a$, $AD = b$. Trên tia AB lấy điểm E , CE cắt tia AD tại F . Tính giá trị nhỏ nhất của đoạn EF .

Giải :

$$\text{Ta có công thức tổng quát sau : } EF_{\min} = \left(\sqrt{\left(\sqrt[3]{a}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{b}\right)^2} \right)^3.$$

Câu 30 : Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + x^2 + x$ (C) và $A(1;4), B(1;1)$. Gọi (Δ) là tiếp tuyến của (C) thỏa và có khoảng cách từ A đến (Δ) gấp 2 lần khoảng cách từ B đến (Δ) . Hỏi có bao nhiêu tiếp tuyến thỏa điều kiện trên biết phương trình tiếp tuyến tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) có dạng:

A. 3

B. 4

C. 1

D. 5

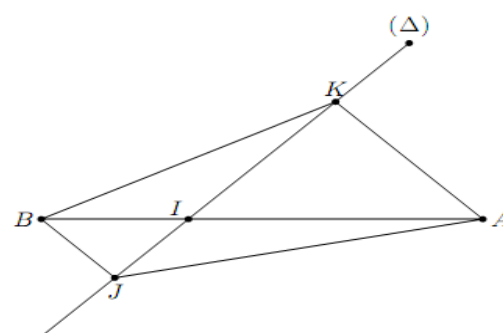
Giải:

Gọi K, J lần lượt là hình chiếu của A, B trên (Δ) .

Ta có $d[A; (\Delta)] = 2d[B; (\Delta)] \neq 0 \Leftrightarrow AK = 2BJ \neq 0 \Rightarrow (\Delta)$ và AB cắt nhau.

Vậy $\exists \{I\} = (\Delta) \cap AB$ với AB là đường thẳng.

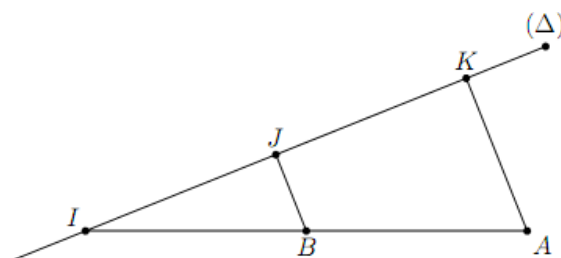
$$\text{Ta có } \begin{cases} AK \parallel BJ \\ KJ \cap AB = I \Rightarrow IA = 2IB \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB} \\ \overrightarrow{IA} = -2\overrightarrow{IB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} I(1; -2) \\ I(1; 2) \end{cases} \\ AK = 2BJ \end{cases}$$



Vậy (Δ) luôn đi qua một trong hai điểm cố định $I(1; -2)$ hay $I(1; 2)$.

Với trường hợp $d[A;(\Delta)] = 2d[B;(\Delta)] = 0$ thì $(\Delta) \equiv AB$ nên điều trên vẫn đúng. Vậy ta luôn có (Δ) luôn đi qua một trong hai điểm cố định $I(1;-2)$ hay $I(1;2)$.

(Δ) là tiếp tuyến của (C) tại tiếp điểm $M(x_0; y_0)$ nên (Δ) có dạng: $y = (x - x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0)$ với $f'(x_0) = 3x_0^2 + 2x_0 + 1$ và $f(x_0) = x_0^3 + x_0^2 + x_0$.



Trường hợp 1: $I(1;-2) \in (\Delta)$, ta có: $-2 = (1 - x_0) \cdot (3x_0^2 + 2x_0 + 1) + x_0^3 + x_0^2 + x_0$.
 $\Leftrightarrow 2x_0^3 - 2x_0^2 - 2x_0 - 3 = 0 \quad (1)$.

Đặt $g(x) = 2x^3 - 2x^2 - 2x - 3$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Số giao điểm của $g(x)$ và Ox chính là số nghiệm của phương trình (1) chính là số tiếp tuyến của trường hợp 1.

Ta có $g'(x) = 6x^2 - 4x - 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow g(1) \cdot g\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{355}{27} > 0 \Rightarrow 2$ điểm cực trị của $g(x)$

nằm cùng phía với trục $Ox \Rightarrow g(x)$ cắt Ox tại một điểm duy nhất $\Rightarrow$ Có **một** tiếp tuyến thỏa **trường hợp 1**.

Trường hợp 2: $I(1;2) \in (\Delta)$, ta có:

Chứng minh tương tự $\Rightarrow$ Có **ba** tiếp tuyến thỏa **trường hợp 2**.

Vì $x_A = x_B = 1 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng qua A, B có dạng: $x = 1 \Rightarrow (d)$ không thể là tiếp tuyến của (C)

Vậy có tổng cộng **bốn** tiếp tuyến thỏa yêu cầu đề bài.

Chương 2 : Hàm mũ, hàm lũy thừa, hàm Log

Câu 31 : Định m để bất phương trình sau thỏa mãn mọi $x > 0 : \log_2(2^{x+1} + 6) > m - x$.

- A. $m > 3$ B. $m \leq 3$ C. Không có m D. Đúng mọi m

Giải :

Ta có : $\log_2(2^{x+1} + 6) > m - x$.

$$\Leftrightarrow 2^{x+1} + 6 > 2^{m-x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^x + 6 > 2^m \cdot 2^{-x}$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (2^x)^2 + 6 \cdot 2^x > 2^m$$

Đặt : $t = 2^x$. Do $x > 0 \Rightarrow t > 1$. Bất phương trình trở thành : $2t^2 + 6t > 2^m$.

Đặt $f(t) = 2t^2 + 6t - 2^m$ với $t \in (1; +\infty)$.

$$f'(t) = 4t + 6 > 0 \text{ với } t \in (1; +\infty).$$

$\Rightarrow f(t)$ hàm đồng biến với $t \in (1; +\infty)$.

$$\Rightarrow f(t) > f(1) \geq 0 \Leftrightarrow 8 - 2^m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Câu 32 : Có bao nhiêu giá trị nguyên m để phương trình :

$$\log_3(x+2) + m \log_{\sqrt{x+2}} 9 = 16. \text{ Có 2 nghiệm đều lớn hơn } -1.$$

- A. 14 B. 15 C. 16 D. 17

Giải :

Đặt $t = \log_3(x+2)$.

$$\text{Phương trình trở thành : } t + \frac{4m}{t} = 16 \Leftrightarrow t^2 - 16t + 4m = 0 \quad (*)$$

Để phương trình (*) cho có 2 nghiệm đều lớn hơn -1 thì (*) phải có nghiệm nghiệm lớn hơn 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 64 - 4m > 0 \\ S = 16 > 0 \\ P = 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 16.$$

Vậy có 15 giá trị nguyên của m thỏa bài toán.

Câu 33 : Định m để phương trình :

$$(m-3) \left[\log_{\frac{1}{2}}(x-4) \right]^2 + (2m-1) \log_2(x-4) + m+2 = 0 \text{ có nghiệm } x_1, x_2 \text{ thỏa } 4 < x_1 < x_2 < 6.$$

- A. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m > 3 \end{cases}$ C. $\begin{cases} -1 < m < \frac{1}{2} \\ m > 3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} m < 1 \\ m > 2 \end{cases}$

Giải :

Đặt $t = \log_2(x-4)$.

$$\text{Phương trình trở thành : } (m-3)t^2 + (2m-1)t + (m+2) = 0 \quad (*)$$

$$\text{Với } 4 < x < 6 \Rightarrow \log_2(x-4) < 1 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 1)$$

Do phương trình có 2 nghiệm $m \neq 3$.

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4(m+2)(m-3) = 25.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{-(m+2)}{(m-3)} \end{cases}$$

$$\text{Vậy để thỏa yêu cầu bài toán} \Rightarrow \frac{-(m+2)}{(m-3)} < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 34: Có bao nhiêu giá trị $a \in (0;1)$ để phương trình $\log_5(25^x - \log_5 a) = x$ có nghiệm duy nhất.

A. 4

B. 3

C. 2

D. 1

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 25^x - 5^x = \log_5 a$ (1).

Đặt $t = 5^x$ ($t > 0$) $\Rightarrow$ Phương trình (1) trở thành: $t^2 - t = \log_5 a$ (2).

Để phương trình (1) có nghiệm duy nhất thì phương trình (2) có đúng 1 nghiệm dương.

Xét: $f(t) = t^2 - t$ với $t \in (0; +\infty)$.

$$\Rightarrow f'(t) = 2t - 1, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có để phương trình (2) có 1 nghiệm dương duy nhất thì:

$$\Rightarrow \begin{cases} \log_5 a > 0 \\ \log_5 a = -\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \end{cases}.$$

Câu 35: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình $\sqrt{\log_2^2 x + \log_{\frac{1}{2}} x^2 - 3} = m(\log_4 x^2 - 3)$ (1) có nghiệm thuộc khoảng $[32; +\infty)$.

A. 3

B. 2

C. 1

D. 0

Giải:

$$\text{Gọi } t = \log_2 x \text{ } (\forall x > 0) \Rightarrow \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}} x^2 = -2\log_2 x \\ \log_4 x^2 = \log_2 x \end{cases}.$$

Theo giả thuyết (1) có nghiệm $\forall x \geq 32 \Leftrightarrow t = \log_2 x \geq \log_2 2^5 \Leftrightarrow t \geq 5$.

$$\text{Theo yêu cầu bài toán ta có: } \begin{cases} t \geq 5 \\ \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3} = m \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

$$\text{Xét } f(t) = \frac{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}{t - 3} = \sqrt{\frac{t+1}{t-3}} \text{ với } t \in [5; +\infty).$$

$$\Rightarrow f'(t) = \frac{-2}{(t-3)^2 \sqrt{\frac{t+1}{t-3}}} < 0 \text{ với } t \in [5; +\infty).$$

$\Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $[5; +\infty)$.

Về bảng biến thiên ta có $1 < m \leq \sqrt{3}$.

Câu 36: Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(mx - 6x^3) + 2\log_{\frac{1}{2}}(-14x^2 + 29x - 2) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt :

- A. $18 < m < \frac{39}{2}$ B. $19 < m < \frac{39}{2}$ C. $19 < m < 20$ D. $18 < m < 20$

Giải :

$$pt \Leftrightarrow \log_2(mx - 6x^3) = \log_2(-14x^2 + 29x - 2).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -14x^2 + 29x - 2 \\ mx - 6x^3 = -14x^2 + 29x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{14} < x < 2 \\ m = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x} \quad (*) \end{cases}$$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 3 nghiệm phân biệt thuộc $\left(\frac{1}{14}; 2\right)$.

Xét $f(x) = 6x^2 - 14x + 29 - \frac{2}{x}$ với $x \in \left(\frac{1}{14}; 2\right)$.

Câu 37: Tập tất giá trị của m để phương trình $2^{(x-1)^2} \cdot \log_2(x^2 - 2x + 3) = 4^{|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$ có đúng bốn nghiệm phân biệt là :

- A. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$ B. $\left(-1; \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$ C. $\left(-0; \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$ D. $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\}$

Giải :

$$2^{x^2-2x+1} \cdot \log_2[(x^2 - 2x + 1) + 2] = 2^{2|x-m|} \cdot \log_2(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 - 2x + 1) = f(2|x-m|)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x-m| \quad (*)$$

Để phương trình có đúng 4 nghiệm phân biệt thì $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 2|x-m|$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 1 = 2(x-m) \\ x^2 - 2x + 1 = -2(x-m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 1 + 2m = 0 \quad (1) \\ x^2 = 2m - 1 \quad (2) \end{cases}$$

Để phương trình có 4 nghiệm phân biệt thì (1), (2) phải có 2 nghiệm phân biệt và không có nghiệm chung.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'_{(1)} = 4 - (1 + 2m) > 0 \\ 2m - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{3}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Ta loại $m=1$ vì lúc đó 4 nghiệm phân biệt nhưng có 2 nghiệm trùng nhau :

$$\text{Vậy } m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right) \setminus \{1\} \Rightarrow D.$$

Câu 38 : Cho phương trình $\log_2(mx^3 - 5mx^2 + \sqrt{6-x}) = \log_{2+m}(3 - \sqrt{x-1})$ với mọi $m \geq 0$. Hỏi phương trình có bao nhiêu nghiệm với mọi $m \geq 0$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. vô số

Giải :

Điều kiện cần :

Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình đúng với mọi $m \geq 0 \Rightarrow$ Nghiệm sẽ thỏa với bất kì $m \geq 0$, chọn $m = 0$.

$$\text{Với } m = 0, \text{ ta có } pt \Leftrightarrow \log_2(\sqrt{6-x_0}) = \log_2(3 - \sqrt{x_0-1}) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 5 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ :

$$x_0 = 2 \Leftrightarrow \log_2(-12m^2 + 2) = \log_{2+m^2} 2.$$

Điều kiện xác định $-12m^2 + 2 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{6}} < m < \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow$ không thỏa với mọi $m \geq 0$.

$$x_0 = 5 \Leftrightarrow \log_2(1) = \log_{2+m^2}(1) \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow \text{Phương trình có nghiệm đúng với mọi } m \geq 0.$$

Vậy có 1 giá trị thỏa yêu cầu bài toán .

Câu 39 : Cho phương trình $\log_{7+m^2}(\sqrt{m^2-x} + 2m) = \log_8(3m - mx)$ với mọi $m > 0$. Số nghiệm của phương trình đúng với mọi $m > 0$ là :

A. 0

B. 1

C. 2

D. vô số

Giải :

Điều kiện cần :

Giả sử $x = x_0$ là nghiệm của phương trình đúng với mọi $m > 0 \Rightarrow$ Nghiệm sẽ thỏa với bất kì $m > 0$, chọn $m = 1$.

$$\text{Với } m = 1, \text{ ta có } pt \Leftrightarrow \log_8(\sqrt{1-x_0} + 2) = \log_8(3 - x_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = 1 \end{cases}.$$

Điều kiện đủ :

$$x_0 = 0 \Leftrightarrow \log_{7+m^2}(3m) = \log_8(3m) \Rightarrow \text{không thỏa với mọi } m \geq 0 \text{ (Ví dụ } m = 2 \Rightarrow \log_{11} 6 \neq \log_8 6 \text{)}.$$

$$x_0 = 1 \Leftrightarrow \log_{7+m^2}(\sqrt{m^2-1} + 2m) = \log_8(2m)$$

$$\Rightarrow \text{không thỏa với mọi } m \geq 0 \text{ (Ví dụ } m = 2 \Rightarrow \log_{11}(\sqrt{3} + 6) \neq \log_8 6 \text{)}.$$

Vậy có 0 giá trị thỏa yêu cầu bài toán .

Câu 40 : Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}}$. Tính $P = \sqrt{2} [f(-2016) + f(-2015) + \dots + f(2017)]$.

A. $P = 2019$ B. $P = 2018$ C. $P = 2017$ D. $P = 2016$ **Giải :**

$$f(x) + f(1-x) = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{1}{2^{1-x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow P = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}_{2017 \text{ số}} = 2017$$

Đáp số $P = 2017$.

Câu 41: Ký hiệu $f(x) = \left(x^{1 + \frac{1}{2 \log_4 x}} + 8^{\frac{1}{3 \log(x^2)^2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} - 1$. Giá trị của $f(f(2017))$ bằng :

A. $P = 2019$ B. $P = 2018$ C. $P = 2017$ D. $P = 2016$ **Giải:**Điều kiện : $x \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$.

$$\bullet \quad x^{1 + \frac{1}{2 \log_4 x}} = x^{1 + \log_x 2} = x \cdot x^{\log_x 2} = 2x.$$

$$\bullet \quad 8^{\frac{1}{3 \log(x^2)^2}} = 8^{\frac{1}{3 \log_2 x^2}} = 8^{\frac{1}{\log_2 x^2}} = 2^{\log_2 x^2} = x^2.$$

$$\Rightarrow f(x) = (x^2 + 2x + 1)^{\frac{1}{2}} = (x+1) - 1 = x \Rightarrow f(f(2017)) = 2017.$$

Câu 42 : Cho các số thực dương a, b thỏa $\log_9 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b)$. Tính tỉ số $\frac{a}{b}$.

A. $\frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

B. $\frac{a}{b} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

C. $\frac{a}{b} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$

D. $\frac{a}{b} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$

Giải :

$$\text{Ta có : } \log_9 a = \log_{12} b = \log_{16} (a+b) = k \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9^k \\ b = 12^k \\ a+b = 16^k \end{cases}.$$

$$\Rightarrow 9^k + 12^k = 16^k \Leftrightarrow \left(\frac{9}{12} \right)^k + \left(\frac{12}{9} \right)^k - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \right)^2 - \left(\frac{a}{b} \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Câu 43 : Cho $\begin{cases} x, y, z, k > 0 \\ a, b, c \geq 0 \end{cases}$ thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{k}$ và $ax^4 = by^4 = cz^4$. Tính giá trị $A = ax^3 + by^3 + cz^3$ theo a, b, c, k .

A. $A = k^2 \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \right)^4$

C. $A = k^3 \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \right)^4$

B. $A = \frac{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \right)^4}{k^2}$

D. $A = \frac{\left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \right)^4}{k^3}$

Giải :

Ta có : $A = ax^3 + by^3 + cz^3 = \frac{ax^4}{x} + \frac{by^4}{y} + \frac{cz^4}{z} = ax^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = k^3 ax^4 \left(\frac{1}{k} \right)^4 = k^3 ax^4 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)^4$

$$= k^3 ax^4 \left(\frac{\sqrt[4]{ax^4}}{x} + \frac{\sqrt[4]{by^4}}{y} + \frac{\sqrt[4]{cz^4}}{z} \right)^4 = k^3 \left(\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c} \right)^4 \text{ do } \begin{cases} x, y, z > 0 \\ a, b, c \geq 0 \\ ax^4 = by^4 = cz^4 \end{cases}.$$

Câu 44 : Cho $A = x \log_2 \left(\sqrt[4]{a^3 b^2} \cdot \sqrt[3]{a^2 b^4} \right) - 4y \log_{\frac{1}{16}} \left(\sqrt{a^3 b^5} \sqrt[5]{a^3 b^4} \right) - \log_2 a$ ($a, b > 0$). Gọi x, y là giá trị để A không đổi với mọi $a, b > 0$. Tính $P = x + y$.

- A. 4 B. $-\frac{20}{9}$ C. $\frac{16}{9}$ D. $\frac{23}{12}$

Giải :

$$A = x \left(\log_2 a^{\frac{3}{4}} + \log_2 b^{\frac{1}{2}} + \log_2 a^{\frac{2}{3}} + \log_2 b^{\frac{4}{3}} \right) + y \left(\log_2 a^{\frac{3}{2}} + \log_2 b^{\frac{5}{2}} + \log_2 a^{\frac{3}{5}} + \log_2 b^{\frac{4}{5}} \right) - \log_2 a$$
$$= \left(\frac{17}{12}x + \frac{21}{10}y - 1 \right) \log_2 a + \left(\frac{11}{6}x + \frac{33}{10}y \right) \log_2 b.$$

Để A không phụ thuộc vào $a, b > 0$ thì $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{17}{12}x + \frac{21}{10}y - 1 = 0 \\ \frac{11}{6}x + \frac{33}{10}y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -\frac{20}{9} \end{cases}.$

Câu 45 : Cho $x, y \in \mathbb{R}^+$ thỏa $\ln x + \ln y \geq \ln(x^2 + y)$. Tính giá trị nhỏ nhất $P = x + y$.

- A. $P = 3$ B. $P = 3 + \sqrt{2}$ C. $P = 3 + 2\sqrt{2}$ D. $P = 3 + 3\sqrt{2}$

Giải :

Theo giả thiết ta có : $xy \geq x^2 + y \Leftrightarrow y(x-1) \geq x^2$.

Do $\begin{cases} x^2 > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \Rightarrow P > 1$.

Vậy từ đó ta có : $\begin{cases} xy \geq x^2 + y \\ y = P - x \\ P > 1 \end{cases} \Leftrightarrow 2x^2 - (P+1)x + P \leq 0 \quad (*)$.

Vậy để $(*)$ có nghiệm với $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow \Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow P^2 - 6P + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P \geq 3 + 2\sqrt{2} \\ P \leq 3 - 2\sqrt{2} \text{ (loại do } P < 1) \end{cases} \Leftrightarrow P \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Câu 46 : Cho $a_1, a_2, \dots, a_{2017} \in \mathbb{R}$ là 2017 số phân biệt đều lớn hơn 1.

Phương trình $a_1^x + a_2^x + \dots + a_{2017}^x = (a_1 + a_2 + \dots + a_{2017} - 2017)x + 2017$ với x là ẩn số thì có bao nhiêu nghiệm :

A. 1

B. 2

C. 4

D. A, B, C đều sai

Giải :

$$\text{Xét } f(x) = a_1^x + a_2^x + \dots + a_{2017}^x - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2017} - 2017)x - 2017.$$

$$\Rightarrow f'(x) = a_1^x \ln a_1 + a_2^x \ln a_2 + \dots + a_{2017}^x \ln a_{2017} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{2017} - 2017).$$

$$\Rightarrow f''(x) = a_1^x (\ln a_1)^2 + a_2^x (\ln a_2)^2 + \dots + a_{2017}^x (\ln a_{2017})^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow f'(x) \text{ có không quá một nghiệm.}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ có không quá hai nghiệm.}$$

$$\text{Mà } \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Vậy phương trình có hai nghiệm } \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Câu 47 : Phương trình $\left[16^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|}\right]^{\log_5 2017} = 2017$ có bao nhiêu nghiệm trong khoảng $(0; 2017)$.

A. 641

B. 642

C. 1282

D. 1283

Giải :

$$\text{Phương trình tương đương } 16^{2|\sin x|} + 4^{|\cos x|} = 5.$$

$$\text{Về trái : } 4^{4|\sin x|} + 4^{|\cos x|} = 4^{4|\sin x|} + \frac{1}{4} \cdot 4^{|\cos x|} + \frac{1}{4} \cdot 4^{|\cos x|} + \frac{1}{4} \cdot 4^{|\cos x|} + \frac{1}{4} \cdot 4^{|\cos x|} \geq 5 \sqrt[5]{4^{4|\sin x| + 4|\cos x| - 4}} \geq 5.$$

$$\text{Do } \begin{cases} |\sin x| \geq \sin^2 x \\ |\cos x| \geq \cos^2 x \end{cases} \Rightarrow |\sin x| + |\cos x| \geq 1.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} 4^{4|\sin x|} = \frac{1}{4} \cdot 4^{|\cos x|} \\ |\sin x| + |\cos x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow |\sin x| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} 0 < x < 2017 \\ x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k\pi < 2017 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < k < 642,03... \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in [1; 642] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Vậy số nghiệm của phương trình thỏa yêu cầu bài toán là : $642 - 1 + 1 = 642$.

Câu 48 : Có tất cả bao nhiêu giá trị m trong khoảng $(-2017; 2017)$ để phương trình $4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 10 = 2(2^x - 3)\sin(mx)$ có nghiệm trong khoảng $(1; 3)$:

A. 1283

B. 1284

C. 1285

D. 1286

Giải :

$$\text{Ta có : } 4^x - 3 \cdot 2^{x+1} + 10 = 2(2^x - 3)\sin(mx)$$

$$\Leftrightarrow \left((2^x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2^x + 9 \right) + 1 - 2(2^x - 3) \sin(mx) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 3)^2 - 2(2^x - 3) \sin(mx) + [\sin(mx)]^2 + [\cos(mx)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow [(2^x - 3) - \sin(mx)]^2 + [\cos(mx)]^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2^x - 3) - \sin(mx) = 0 & (1) \\ \cos(mx) = 0 & (2) \end{cases}$$

Giải phương trình (2) $\cos(mx) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ mx = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases} \quad (k, l \in \mathbb{Z}) .$

Thay $mx = -\frac{\pi}{2} + 2l\pi$ vào (2) $\Rightarrow 2^x - 3 = -1 \Leftrightarrow x = 1$ loại do $x \in (1; 3)$.

Thay $mx = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ vào (2) $\Rightarrow 2^x - 3 = 1 \Leftrightarrow x = 2$ (nhận) $\Rightarrow m = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có : $\begin{cases} m \in (-2017; 2017) \\ m = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2017 < \frac{\pi}{4} + k\pi < 2017 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -642, 28... < k < 641, 78.. \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in [-642; 641] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \text{số giá trị } k \text{ nguyên là : } 641 - (-642) + 1 = 1284 .$$

Vậy có 1284 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán .

Chương 3 : Nguyên hàm - Tích phân

Câu 49 : Tính tích phân $I = \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \frac{(x+1)^{2016}}{(x+2)^{2018}} dx$.

- A. $I = 2017$ B. $I = \frac{-1}{2017}$ C. $I = 1$ D. $I = \frac{1}{2017}$

Giải :

Đặt $t = \frac{x+1}{x+2} \Rightarrow dt = \frac{1}{(x+2)^2} dx$. Đổi cận $\begin{matrix} x & -\frac{3}{2} & -1 \\ t & -1 & 0 \end{matrix} \Rightarrow I = \int_{-1}^0 t^{2016} dt = \left[\frac{t^{2017}}{2017} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{2017} \Rightarrow D$.

Câu 50 : Cho $I = \int_0^a \frac{2x^3 + 3x^2 + 4x + 3}{(x+1)^{2019}} dx = \frac{A_1}{(a+1)} + \frac{A_2}{(a+1)^2} + \dots + \frac{A_{2017}}{(a+1)^{2017}} + B$ với $A_1, A_2, \dots, A_{2017}, B \in \mathbb{Q}$,

$a > 0$. Tính $P = A_1 + 2A_2 + \dots + 2016A_{2016} + 2017A_{2017}$.

- A. $P = 1$ B. $P = -3$ C. $P = 2017$ D. $P = 0$

Giải :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^a \frac{2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1)}{(x+1)^{2019}} dx = \int_0^a \left[\frac{2}{(x+1)^{2016}} - \frac{3}{(x+1)^{2017}} + \frac{4}{(x+1)^{2018}} \right] dx \\ &= -\frac{2}{2015(a+1)^{2015}} + \frac{3}{2016(a+1)^{2016}} - \frac{4}{2017(a+1)^{2017}} - F(0) \\ &\Rightarrow P = -2 + 3 - 4 = -3. \end{aligned}$$

Câu 51 : Tính $I = \int_2^4 \max\{x^2; 4x-3\} dx$:

- A. $I = 2$ B. $I = 3$ C. $I = \frac{58}{3}$ D. $I = \frac{61}{3}$

Giải :

Gọi $f(x) = x^2$, $g(x) = 4x-3$. Xét $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 4x + 3$ với $x \in [2; 4]$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} h(x) \leq 0 \ (x \in [2; 3]) \\ h(x) \geq 0 \ (x \in [3; 4]) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x) \ (x \in [2; 3]) \\ f(x) \geq g(x) \ (x \in [3; 4]) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow I = \int_2^4 \max\{x^2; 4x-3\} dx = \int_2^3 g(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \frac{58}{3}.$$

Câu 52 : Tính thể tích vật thể nằm giữa hai mặt phẳng $x=0$; $x=1$. Biết diện tích thiết diện của vật thể cắt bởi mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x ($0 \leq x \leq 1$) là một đường tròn có độ dài đường kính $R = x\sqrt{x+1}$.

$$A. V = \frac{7\pi}{6}$$

$$B. V = \frac{7\pi}{3}$$

$$C. V = \frac{7\pi}{9}$$

$$D. V = \frac{7\pi}{12}$$

Giải :

Ta có diện tích của thiết diện cắt bởi mặt phẳng (P) là : $S(x) = \pi R^2 = \pi(x^3 + x^2)$.

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 (x^3 + x^2) dx = \frac{7\pi}{12} .$$

Câu 53 : Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ và thỏa mãn $f(x) + 2f(1-x) = 3x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Tính tích phân $I = \int_0^1 f(x) dx$.

$$A. I = 1$$

$$B. I = 2$$

$$C. I = \frac{1}{2}$$

$$D. I = 3$$

Giải:

Ta có $f(x) + 2f(1-x) = 3x \Leftrightarrow f(x) = 3x - 2f(1-x) \Rightarrow I = \int_0^1 [3x - 2f(1-x)] dx$.

$$= \frac{3}{2} x^2 \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 f(1-x) dx = \frac{3}{2} - 2 \int_0^1 f(1-x) dx .$$

Đặt $t = 1-x \Rightarrow dt = -dx$, đổi cận: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=1 \Rightarrow t=0 \end{cases}$.

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(1-x) dx = - \int_1^0 f(t) dt = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(x) dx = I .$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2} - 2I \Rightarrow 3I = \frac{3}{2} \Rightarrow I = \frac{1}{2} .$$

Cách 2 : Chọn hàm:

Giả sử : $f(x) = ax + b \Rightarrow f(1-x) = a(1-x) + b$.

Ta có : $f(x) + 2f(1-x) = ax + b + 2a(1-x) + 2b = -ax + (3b + 2a) = 3x$.

Đồng nhất hệ số ta có : $\begin{cases} -a = 3 \\ 2a + 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow \int_0^1 (-3x + 2) dx = \frac{1}{2} .$

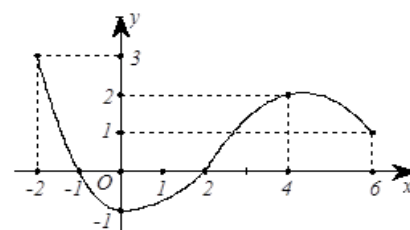
Câu 54 : Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên đoạn $[-2;6]$ như hình vẽ bên. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau :

$$A. \max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(-2)$$

$$C. \max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(2)$$

$$B. \max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(6)$$

$$D. \max_{x \in [-2;6]} f(x) = f(-1)$$



Giải :

$f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm tại $f'(-1) \Rightarrow x = -1$ là điểm cực đại .

$f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương tại $f'(2) \Rightarrow x = 2$ là điểm cực tiểu .

$$\Rightarrow \max_{x \in [-2; 6]} f(x) = \begin{cases} f(-1) \\ f(6) \end{cases}.$$

Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi $f'(x)$; Ox ; $x = -1$; $x = 2$.

S_1 là diện tích giới hạn bởi $f'(x)$; Ox ; $x = 2$; $x = 6$.

Dựa vào hình vẽ ta có: $S_1 < S_2 \Leftrightarrow \int_{-1}^2 |f'(x)| dx < \int_2^6 |f'(x)| dx$.

$$\Leftrightarrow f(-1) - f(2) < f(6) - f(2) \Leftrightarrow f(-1) < f(6).$$

Câu 55: Cho $(P): y = 3x^2$ và đường thẳng d qua $M(1; 5)$ có hệ số góc k . Biết k chính là hệ số góc để diện tích hình phẳng giới hạn bởi d ; (P) đạt giá trị nhỏ nhất. Tính diện tích đó:

A. $\frac{8\sqrt{6}}{9}$

B. $\frac{4\sqrt{6}}{9}$

C. $\frac{11\sqrt{6}}{9}$

D. $\frac{7\sqrt{6}}{9}$

Giải:

$d: y = kx - k + 5 \Rightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm của (P) ; d là: $3x^2 - kx + (k - 5) = 0 \quad (1)$.

$$\Delta = k^2 - 12k + 60 = (k - 6)^2 + 24 > 0.$$

Gọi $x_1 < x_2$ là các nghiệm của $(1) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{k - \sqrt{\Delta}}{6} \\ x_2 = \frac{k + \sqrt{\Delta}}{6} \end{cases}$. Ta có: $\begin{cases} 3x^2 - kx + (k - 5) < 0 \quad [\forall x \in (x_1; x_2)] \\ x_1 + x_2 = \frac{k}{3} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{k - 5}{3} \end{cases}$.

Khi đó $S = \int_{x_1}^{x_2} (-3x^2 + kx + 5 - k) dx = \left[-x^3 + \frac{kx^2}{2} + (5 - k)x \right]_{x_1}^{x_2} = \dots$

$$\dots = (x_2 - x_1) \left[\frac{k}{2}(x_1 + x_2) + 5 - k - (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 \right]$$

$$= \frac{\sqrt{\Delta}}{54} (k^2 - 12k + 60) = \frac{(\sqrt{\Delta})^3}{54}$$

Vậy $S_{\min} = \frac{8\sqrt{6}}{9} \Leftrightarrow \Delta_{\min} \Leftrightarrow k = 6$.

Câu 56: Cho $(C_m): -x^4 + (m - 1)x^2 + 2 = 0$ luôn có 3 cực trị. Gọi (Δ) là tiếp tuyến tại điểm cực tiểu của (C_m) . Gọi m để diện tích hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và (Δ) là $\frac{128}{15}$. Tính $(2m^2 - m + 3)^2$

A. 324

B. 2304

C. 961

D. 16

Giải:

Do (C_m) luôn có cực trị $\Rightarrow m > 1$. Điểm cực tiểu là $x = 0 \Rightarrow (\Delta): y = 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm : $-x^4 + (m-1)x^2 + 2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{m-1} \end{cases}$

$$\Rightarrow S = \int_{-\sqrt{m-1}}^{\sqrt{m-1}} [-x^4 + (m-1)x^2] dx = 2 \left[-\frac{x^5}{5} + \frac{(m-1)x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{m-1}} = \frac{4(m-1)^2 \sqrt{m-1}}{15}$$

Ta có : $\frac{4(m-1)^2 \sqrt{m-1}}{15} = \frac{128}{15} \Leftrightarrow m=5$.

Câu 57 : Xét hàm số $y = x^2$ trên $[0;1]$ và 1 giá trị m bất kì thuộc $[0;1]$. Gọi S_1 là diện tích giới hạn bởi đường $x=0; y=m^2; y=x^2$, S_2 là diện tích giới hạn bởi đường $y=x^2; y=m^2; x=1$. Gọi $S = S_1 + S_2$, tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của S là :

- A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{11}{12}$ C. $\frac{1}{3}$ D. 1

Giải :

Phương trình hoành độ giao điểm : $x^2 = m^2 \Leftrightarrow x = m \ (x, m \in [0;1])$.

$$S = S_1 + S_2 = \int_0^m (m^2 - x^2) dx + \int_m^1 (x^2 - m^2) dx = m^3 - \frac{m^3}{3} + \left[\left(\frac{1}{3} - m^2 \right) - \left(\frac{m^3}{3} - m^3 \right) \right] = \frac{4}{3} m^3 - m^2 + \frac{1}{3} .$$

Xét $f(m) = \frac{4}{3} m^3 - m^2 + \frac{1}{3}$ với $m \in [0;1]$.

$$\Rightarrow f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=\frac{1}{2} \end{cases} \ (m \in [0;1]) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = \frac{1}{3} \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \\ f(1) = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min S = \frac{1}{4} \\ \max S = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow T = \min S + \max S = \frac{11}{12} .$$

Câu 58 : Cho $a > 0$ sao cho diện tích S giới hạn bởi hai parabol $(P_1): y = \frac{-x^2 - 2ax + 4a^2}{a^4 + 1}$,

$(P_2): y = \frac{x^2}{a^4 + 1}$ có giá trị lớn nhất. Vậy giá trị lớn nhất của S là :

- A. $S_{\max} = \frac{27}{\sqrt[4]{3}}$ B. $S_{\max} = \frac{27}{2\sqrt[4]{3}}$ C. $S_{\max} = \frac{27}{4\sqrt[4]{3}}$ D. $S_{\max} = \frac{27}{8\sqrt[4]{3}}$

Giải :

Phương trình hoành độ giao điểm $(P_1), (P_2)$ là :

$$\frac{-x^2 - 2ax + 4a^2}{a^4 + 1} = \frac{x^2}{a^4 + 1} \Leftrightarrow 2x^2 + 2ax - 4a^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=a \\ x=-2a \end{cases} .$$

$$\Rightarrow S = \int_{-2a}^a \left| \frac{2x^2 + 2ax - 4a^2}{a^4 + 1} \right| dx = \left(\frac{1}{a^4 + 1} \right) \int_{-2a}^a (-2x^2 - 2ax + 4a^2) dx$$

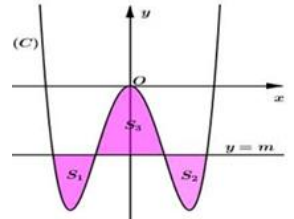
$$= \left(\frac{1}{a^4 + 1} \right) \left[\frac{-2x^3}{3} - ax^2 + 4a^2x \right]_{-2a}^a = \frac{9a^3}{a^4 + 1} = \frac{27a^3}{a^4 + a^4 + a^4 + 3}$$

$$\leq \frac{27a^3}{4\sqrt[4]{3a^{12}}} = \frac{27}{4\sqrt[4]{3}} \text{ (Theo bất học Cauchy) .}$$

$$\Rightarrow \text{Vậy } S_{\max} = \frac{27}{4\sqrt[4]{3}} \text{ khi } a = \sqrt[4]{3} .$$

Cách khác : Các bạn có thể tìm $S_{\max}$ bằng phương pháp hàm số .

Câu 59 : Cho đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 4x^2$ cắt đường thẳng $d : y = m$ tại bốn điểm phân biệt và tạo ra các hình phẳng có diện tích S_1, S_2, S_3 như hình vẽ. Biết $m = -\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì $S_1 + S_2 = S_3$. Khẳng định nào sau đây là đúng :



A. $\sqrt{b} + 5\sqrt{a} = 10$ B. $\sqrt{b} + 5\sqrt{a} = 11$ C. $\sqrt{b} + 5\sqrt{a} = 12$ D. $\sqrt{b} + 5\sqrt{a} = 13$

Giải :

Phương trình hoành độ giao điểm $(C), d \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 - m = 0 (*)$.

Để $(C), d$ thì $(*)$ phải có 4 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 0 . \\ P > 0 \end{cases}$$

Gọi $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$) là 2 nghiệm dương của $(*)$. Do tính đối xứng nên $S_2 = \frac{1}{2} S_3$.

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_1} |x^4 - 4x^2 - m| dx = \int_{x_1}^{x_2} |x^4 - 4x^2 - m| dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{x_1} (x^4 - 4x^2 - m) dx = - \int_{x_1}^{x_2} (x^4 - 4x^2 - m) dx$$

$$\Leftrightarrow F(x_1) - F(0) = -F(x_2) + F(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2^5}{5} - \frac{4x_2^3}{3} - mx_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x_2^4 - 20x_2^2 - 15m = 0$$

Do x_2 là nghiệm của $(*)$ nên ta có : $\begin{cases} 3x_2^4 - 20x_2^2 - 15m = 0 & (1) \\ x_2^4 - 4x_2^2 - m = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow 3(2) - (1) \Leftrightarrow x_2^2 = -\frac{3m}{2}$

Thay vào (2) $\Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}m \right)^2 + 6m - m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{20}{9} \Rightarrow \sqrt{b} + \sqrt{5a} = 13$.

Câu 60 : Cho biết đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị hàm số $f(x)$ nằm phía dưới trục hoành. Gọi

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi trục hoành và phần đồ thị hàm số $f(x)$ nằm phía trên trục hoành. Biết $5b^2 = 36ac$. Tính tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$.

A. 2

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. 3

Giải :

$$\text{Điều kiện để } f(x) \cap Ox \text{ tại 4 điểm phân biệt : } \begin{cases} \Delta = b^2 - 4ac > 0 \\ S = \frac{-b}{a} > 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ a.c > 0 \\ b.c < 0 \end{cases}$$

$$\text{Kết hợp với điều kiện bài cho ta có } \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 \\ a.c > 0 \\ b.c < 0 \\ 5b^2 = 36ac \end{cases} (*).$$

Vì $\frac{S_1}{S_2} = \text{const}$ với mọi bộ số $(a_o; b_o; c_o)$ bất kì thoả $(*) \Rightarrow$ Ta được chọn 1 bộ $(a_o; b_o; c_o)$ bất kì thoả $(*)$.

$$\text{Chọn } \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 6x^2 + 5. \quad f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{\int_{-1}^1 |f(x)| dx}{\int_{-1}^1 |f(x)| dx} = 1.$$

Chương 4 : Số phức .

Câu 61 : Cho số phức z thỏa $|z-8|+|z+8|=20$. Gọi m, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $|z|$. Tính $P=m+n$.

A. $P=10$

B. $P=6$

C. $P=16$

D. $P=20$

Giải :

Gọi $z = x + yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) và $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức .

Trong mặt phẳng phức, xét các điểm $F_1(-8;0); F_2(8;0)$.

$$\text{Ta có } MF_1 = \sqrt{(-8-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x+8)^2 + (y)^2} = |z+8| .$$

$$MF_2 = \sqrt{(8-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{(x-8)^2 + (y)^2} = |z-8| .$$

$$\Rightarrow |z-8| + |z+8| = 20 \Leftrightarrow MF_1 + MF_2 = 20 = \text{const} .$$

Do $MF_1 + MF_2 > F_1F_2 \Rightarrow$ Tập hợp điểm M là 1 elip có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 20 \\ c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 100 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max|z| = 10 \\ \min|z| = 6 \end{cases} .$$

Câu 62 : Cho 3 số phức $z_1; z_2; z_3$ thỏa $\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$. Tính $A = |z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2$

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

B. $2\sqrt{2}$

C. $\frac{8}{3}$

D. $\frac{8}{3}$

Giải :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -z_3 \\ z_1 + z_3 = -z_2 \\ z_2 + z_3 = -z_1 \end{cases} \Rightarrow A = |-z_1|^2 + |-z_2|^2 + |-z_3|^2 = \frac{8}{3} .$$

Câu 63 : Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ ($m \in \mathbb{R}$) . Tìm m_0 ($m_0 > 0$) là giá trị m thỏa $z \cdot \bar{z} = \frac{1}{2}$.

A. 1

B. 0

C. 2

D. 3

Giải :

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} .$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = \left(\frac{m}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2 = \frac{1}{m^2+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \pm 1 .$$

Câu 64 : Cho z và $\bar{z}$ là số phức liên hợp của z . Biết $\frac{z}{\left(\frac{-}{z}\right)^2} \in \mathbb{R}$ và $|z - \bar{z}| = 2\sqrt{3}$. Tìm $|z|$.

- A. $|z| = 1$ B. $|z| = 3$ C. $|z| = 2$ D. $|z| = 4$

Giải :

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow \bar{z} = a - bi$.

Ta có : $|z - \bar{z}| = |(a + bi) - (a - bi)| = |2bi| = 2\sqrt{3} \Rightarrow b^2 = 3$.

$$z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\frac{z}{\bar{z}} \right)^2 \in \mathbb{R}.$$

Theo giả thiết : $\frac{z}{\left(\frac{-}{z}\right)^2} = \frac{z}{\left(\frac{-}{z}\right)^2} \cdot 1 = \frac{z}{\left(\frac{-}{z}\right)^2} \cdot \frac{z^2}{z^2} = \frac{z^3}{\left(z \cdot \bar{z}\right)^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow z^3 \in \mathbb{R}$.

Mà $z^3 = a^3 + 3a^2bi + 3a(bi)^2 + (bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a^2b - b^3 = 0 \\ b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - b^2 = 0 \\ b^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 3 \end{cases} \Rightarrow |z| = 2.$$

Câu 65 : Cho số phức z thỏa mãn $|z| = m^2 + 2m + 5$ với m là số thực. Biết rằng tập hợp điểm của số phức $w = (3 + 4i)z - 2i$ là đường tròn. Tìm bán kính R nhỏ nhất của đường tròn đó.

- A. $R = 5$ B. $R = 10$ C. $R = 15$ D. $R = 20$

Giải :

$$w + 2i = (3 + 4i)z \Rightarrow |w + 2i| = |(3 + 4i)z| = |(3 + 4i)||z| = 5 \left[(m+1)^2 + 4 \right] \geq 20.$$

$\Rightarrow |w + 2i| \geq 20$. Vậy đường tròn có bán kính $R_{\min} = 20$ với tâm $I(0; 2)$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m = -1$.

Câu 66 : Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $z_1 + z_2 = 8 + 6i$ và $|z_1 - z_2| = 2$. Tìm giá trị lớn nhất của $P = |z_1| + |z_2|$.

- A. $P = 4\sqrt{6}$ B. $P = 2\sqrt{26}$ C. $P = 5 + 3\sqrt{5}$ D. $P = 32 + 3\sqrt{2}$

Giải :

$$\text{Gọi : } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = c + di \end{cases} (a, b, c, d \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} a + c + (b + d)i = 8 + 6i \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a + c)^2 + (b + d)^2 = 100 \\ (a - c)^2 + (b - d)^2 = 4 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 = 104 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 52.$$

$$\text{Mặt khác : } P = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)} = 2\sqrt{26}.$$

Cách 2:

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn số phức z_1, z_2 trên mặt phẳng phức và D là điểm thứ tư của hình bình hành $AOBD \Rightarrow D$ là điểm biểu diễn số phức $(z_1 + z_2) \Rightarrow OD = |z_1 + z_2| = 10$.

$|z_1 - z_2|$ chính là độ dài đoạn AB .

$$\Delta OAB \text{ có } \begin{cases} AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos AOB = 4 \\ OD^2 = OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB \cdot \cos AOB = 100 \end{cases} \Rightarrow 104 = 2(OA^2 + OB^2) \geq (OA + OB)^2$$

$$\Rightarrow (OA + OB)_{\max} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26} \Leftrightarrow (|z_1| + |z_2|)_{\max} = 2\sqrt{26}.$$

Câu 67: Cho số phức z thỏa $|z| = 1$. Tính giá trị lớn nhất của biểu thức $T = |z + 1| + 2|z - 1|$.

A. $\max T = 2\sqrt{5}$ B. $\max T = 2\sqrt{10}$ C. $\max T = 3\sqrt{5}$ D. $\max T = 3\sqrt{2}$

Giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T &= |z + 1| + 2|z - 1| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} + 2\sqrt{(a-1)^2 + b^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 + 2a + 1} + 2\sqrt{a^2 + b^2 - 2a + 1} = \sqrt{2a + 2} + 2\sqrt{2 - 2a} \stackrel{B.C.S}{\leq} \sqrt{(1^2 + 2^2)(4)} = 2\sqrt{5}. \end{aligned}$$

Vậy $\max T = 2\sqrt{5}$.

Nếu dùng đạo hàm ta có thể tìm được thêm min.

Câu 68: Cho z_1, z_2 là 2 số phức thỏa $|2z - i| = |2 + iz|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính giá trị $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $P = \sqrt{2}$ C. $P = \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $P = \sqrt{3}$

Giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có: } |2z - i| = |2 + iz| \Leftrightarrow 4a^2 + (2b - 1)^2 = a^2 + (2 - b)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1.$$

Gọi A, B lần lượt là điểm biểu diễn của số phức z_1, z_2 trong mặt phẳng phức.

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}| = 1.$$

$\Rightarrow \Delta OAB$ có $OA = OB = AB = 1 \Rightarrow \Delta OAB$ là tam giác đều.

$$\Rightarrow P = |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = 2|\overrightarrow{OI}| = \sqrt{3} \text{ với } I \text{ là trung điểm } AB.$$

Câu 69: Cho số phức thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $P = |z + 1| + |z^2 - z + 1|$.

A. $A = \frac{13 + 4\sqrt{3}}{4}$ B. $A = \frac{13 + 2\sqrt{3}}{4}$ C. $A = \frac{11 + 4\sqrt{3}}{4}$ D. $A = \frac{13 + 6\sqrt{3}}{4}$

Giải:

Đặt $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow a^2 + b^2 = 1$.

- $|z + 1| = \sqrt{(a+1)^2 + b^2} = \sqrt{2(a+1)}$

$$\begin{aligned} \bullet \quad |z^2 - z + 1| &= |(a^2 + 2abi - b^2) - (a + bi) + a^2 + b^2| = |(2a^2 - a) + (2a - 1)bi| \\ &= \sqrt{(2a^2 - a)^2 + (2a - 1)^2 b^2} = \sqrt{(2a - 1)^2 (a^2 + b^2)} = |2a - 1|. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } P = \sqrt{2(a+1)} + |2a-1|.$$

$$\text{Xét } a \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P(1) = 3 \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases} \cdot \text{Xét } a \in \left[-1; \frac{1}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} \max P = P\left(\frac{-7}{8}\right) = \frac{13}{4} \\ \min P = P\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Kết luận } \begin{cases} \max_{|z|=1} P = \frac{13}{4} \Rightarrow z = -\frac{7}{8} \pm \frac{\sqrt{15}}{8}i \\ \min_{|z|=1} P = \sqrt{3} \Rightarrow z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}.$$

Câu 70 : Cho số phức $z = x + 2yi$ ($x, y \in \mathbb{R}$) thỏa $|z| = 1$. Tính tổng giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $P = x - y$.

A. 0

B. $\sqrt{5}$

C. $-\sqrt{5}$

D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

Giải :

$$\text{Theo giả thiết ta có : } \Rightarrow \begin{cases} |z| = 1 \\ P = x - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4y^2 = 1 \\ x = P + y \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (P + y)^2 + 4y^2 - 1 = 0 \\ x = P + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2 + 2Py + P^2 - 1 = 0 (*) \\ x = P + y \end{cases}$$

Để hệ có nghiệm thì phương trình (*) có nghiệm với mọi $y \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \Delta'_{(*)} = P^2 - 5(P^2 - 1) \geq 0$$

$$\Rightarrow P^2 \leq \frac{5}{4} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{5}}{2} \leq P \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow \max P + \min P = 0.$$

Câu 71 : Cho $|z| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $T = |1 + z^3| + |z^2 + z + 1|$.

A. $P = 5$

B. $P = 7$

C. $P = 6$

D. $P = 8$

Giải :

$$T \leq 1 + |z|^3 + |z|^2 + |z| + 1 = 5. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } z = 1.$$

Ta có :

$$\bullet \quad |1 + z^3| \geq 0 \Rightarrow |1 + z^3| \geq \frac{|1 + z^3|}{2}$$

$$\bullet \quad |z^2 + z + 1| = \frac{|1 - z^3|}{|1 - z|} \geq \frac{|1 - z^3|}{2} \quad (|1 - z| \leq 2, |z| = 1).$$

$$\Rightarrow T \geq \frac{|1 - z^3|}{2} + \frac{|1 + z^3|}{2} \geq 1. \text{ Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi } z = -1. \text{ (may mắn quá !!!)}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \max T = 5 \\ \min T = 1 \end{cases}.$$

Câu 73: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Tính $|z_1 - z_2|$.

A. 0

B. 1

C. $\frac{1}{2}$

D. $\sqrt{2}$

Giải:

$$\text{Gọi } \begin{cases} z_1 = a + bi \\ z_2 = x + yi \end{cases} (a, b, x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \begin{cases} |z_1| = |z_2| = 1 \\ |z_1 + z_2| = \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 1 \\ (a + x)^2 + (b + y)^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = x^2 + y^2 = 1 \\ 2(ax + by) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow |z_1 - z_2| = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2} = \sqrt{(a^2 + b^2) + (x^2 + y^2) - 2(ax + by)} = 1.$$

Câu 74: Cho số phức z_1, z_2 thỏa $|z - 2i| = \sqrt{2}|iz + 1|$ và $|z_1 - z_2| = 1$. Tính $P = |z_1 + z_2|$.

A. $P = \sqrt{7}$

B. $P = \frac{\sqrt{7}}{2}$

C. $P = 2\sqrt{2}$

D. $P = \sqrt{5}$

Giải:

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$), M, N là điểm biểu diễn của z_1, z_2 trong mặt phẳng phức,

Ta có: $|z - 2i| = \sqrt{2}|iz + 1| \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2$.

$\Rightarrow |z_1 + z_2| = |\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}| = 2|\overrightarrow{OI}|$ với I là trung điểm của MN .

$\Rightarrow |z_1 - z_2| = |\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{ON}| = |\overrightarrow{NM}| = 1$.

Ta có: $\triangle OMN$ cân tại $O \Rightarrow OI \perp MN \Rightarrow |OI| = \sqrt{OM^2 - \left(\frac{1}{2}MN\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow 2|OI| = \sqrt{7}$.

Câu 76: Gọi z_1, z_2, z_3, z_4 là nghiệm của phương trình $\left(\frac{z-1}{2z-i}\right)^4 = 1$.

Tính $P = (z_1^2 + 1)(z_2^2 + 1)(z_3^2 + 1)(z_4^2 + 1)$.

A. $P = \frac{17}{7}$

B. $P = \frac{17}{9}$

C. $P = \frac{17}{13}$

D. $P = \frac{17}{11}$

Giải:

Điều kiện: $z \neq \frac{i}{2}$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (z-1)^4 = (2z-i)^4 \\
&\Leftrightarrow [(z-1)^2 - (2z-i)^2][(z-1)^2 + (2z-i)^2] = 0 \\
&\Leftrightarrow [(z-1) + (2z-i)][(z-1) - (2z-i)][(z-1)^2 + (2z-i)^2] = 0 \\
&\Leftrightarrow (3z-1-i)(-z-1+i)[5z^2 - (2+4i)z] = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{1+i}{3} \\ z = -1+i \\ z = 0 \\ z = \frac{2+4i}{5} \end{cases} \Rightarrow P = \frac{17}{9}.
\end{aligned}$$

Câu 77 : Cho số phức z thỏa mãn $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$ và số phức w thỏa $w = z - 2 + 2i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|w|$.

- A. $\min|w| = 2$ B. $\min|w| = \frac{3}{2}$ C. $\min|w| = 3$ D. $\min|w| = 1$

Giải :

Ta có : $|z^2 - 2z + 5| = |(z-1+2i)(z+3i-1)|$

$$\Leftrightarrow |(z-1+2i)(z-1-2i)| = |(z-1+2i)(z+3i-1)| \Leftrightarrow \begin{cases} |z-1+2i| = 0 \\ |z-1-2i| = |z+3i-1| \end{cases}$$

Trường hợp 1 : $|z-1+2i| = 0 \Leftrightarrow z = 1-2i \Rightarrow |w| = 1$.

Trường hợp 2 : $|z-1-2i| = |z+3i-1| \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$ với $z = a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\Rightarrow w = \left(a - \frac{1}{2}i\right) - 2 + 2i = (a-2) + \frac{3}{2}i \Rightarrow |w| = \sqrt{(a-2)^2 + \frac{9}{4}} \geq \frac{3}{2}.$$

Câu 78 : Cho số phức $z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)}$ ($m \in \mathbb{R}$). Gọi k ($k \in \mathbb{R}$) là giá trị nhỏ nhất sao cho tồn tại

$|z-1| \leq k$. Giá trị k thuộc khoảng nào sau đây.

- A. $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$ B. $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$ C. $\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{5}\right)$ D. $\left(\frac{4}{5}; 1\right)$

Giải :

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} \Rightarrow z-1 = \frac{(1-m)+i}{m-i}$$

Ta có : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ ($b \neq 0$). Áp dụng $|z-1| = \frac{|(1-m)+i|}{|m-i|} = \sqrt{\frac{m^2-2m+1}{m^2+1}}$

$$\Rightarrow |z-1| \leq k \Leftrightarrow \begin{cases} k > 0 \\ \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1} \leq k^2 \end{cases} \cdot \text{Xét } f(m) = \frac{m^2 - 2m + 2}{m^2 + 1}$$

Theo yêu cầu bài toán, tồn tại $k_{\min}$ để $|z-1| \leq k \Rightarrow \min f(m) \leq k^2$

$$\text{Ta có } \min f(m) = f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{(\sqrt{5}-1)^2}{4} \Rightarrow k \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (k > 0).$$

Vậy $k = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ là giá trị k cần tìm $\Rightarrow B$.

Cách biến đổi khác, bình thường hơn :

$$z = \frac{i-m}{1-m(m-2i)} = \frac{i-m}{-i^2+2mi-m^2} = \frac{-1}{i-m} = \frac{m}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1}$$

$$\Rightarrow z-1 = \frac{m-m^2-1}{m^2+1} + \frac{i}{m^2+1} \Rightarrow |z-1| = \sqrt{\left(\frac{m-m^2-1}{m^2+1}\right)^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2}$$

$$\Rightarrow |z-1| = \sqrt{\left[\frac{m-(m^2+1)}{m^2+1}\right]^2 + \left(\frac{1}{m^2+1}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2-2m(m^2+1)+(m^2+1)^2+1}{(m^2+1)^2}} = \sqrt{\frac{m^2-2m+2}{m^2+1}}.$$

Câu 79 : Cho số phức z, w thỏa $|z+2-2i| = |z-4i|, w = iz+1$. Giá trị nhỏ nhất của $|w|$ là :

A. $\min |w| = \sqrt{2}$ B. $\min |w| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\min |w| = \sqrt{3}$ D. $\min |w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Giải :

Gọi $z = a+bi \quad (a, b \in \mathbb{R})$.

$$|z+2-2i| = |z-4i| \Leftrightarrow (a+2)^2 + (b-2)^2 = a^2 + (b-4)^2 \Leftrightarrow a+b-2=0$$

$$\Rightarrow \text{Số phức } z = a + (2-a)i \Rightarrow w = (a-1) + ai$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{(a-1)^2 + a^2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dấu "=" khi và chỉ khi $a = \frac{1}{2}$.

Câu 80 : Cho phương trình phức sau : $z^2 + (2a+bi+1)z + (a+2bi)^2 = 0 \quad (a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0)$. Với điều kiện nào sau đây của a, b thì phương trình trên có ít nhất 1 nghiệm thực :

A. $a = \frac{2 \pm \sqrt{4+36b^2}}{9}$ B. $a = \frac{4 + \sqrt{2+36b^2}}{9}$ C. $a = \frac{4 \pm \sqrt{2+36b^2}}{9}$ D. $a = \frac{2 + \sqrt{4+36b^2}}{9}$

Giải :

Gọi $x \in \mathbb{R}$ là nghiệm thực của phương trình :

$$\Rightarrow x^2 + (2a + bi + 1)x + (a + 2bi)^2 = 0.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (2a + 1)x + a^2 - 4b^2 + (bx + 4ab)i = 0 \Rightarrow \text{Áp dụng định nghĩa 2 số phức bằng nhau :}$$

Ta có :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + (2a + 1)x + a^2 - 4b^2 = 0 \\ bx + 4ab = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4a \\ (4a)^2 + (2a + 1)(-4a) + a^2 - 4b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4a \\ 9a^2 - 4a - 4b^2 = 0 \end{cases} (*) \Rightarrow (*) \text{ có nghiệm là } a = \frac{2 \pm \sqrt{\Delta'}}{9} \quad (\Delta' = b'^2 - ac = 4 + 36b^2).$$

Câu 81 : Xét số phức z thỏa $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$. Mệnh đề nào dưới đây đúng :

A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$

B. $2 < |z|$

C. $|z| < \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

Giải :

Ta có : $(1 + 2i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} - 2 + i$

$$\Leftrightarrow (|z| + 2) + (2|z| - 1)i = \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2} \right) \bar{z}$$

$$\Leftrightarrow \left| (|z| + 2) + (2|z| - 1)i \right| = \left| \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|^2} \right) \bar{z} \right| = \frac{|\sqrt{10}|}{|z|^2} \cdot |\bar{z}| = \left| \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|} \right) \right|$$

$$\Leftrightarrow (|z| + 2)^2 + (2|z| - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{|z|} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (|z| - 1)(|z| + 1)(|z|^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow |z| = 1.$$

Câu 82 : Cho số phức $|z^{2017} - 1| = 1$. Gọi $P = |z|$. Tính $A = 2017 \cdot (\max P) - 2017 \cdot (\min P)$.

A. $A = 2017 \cdot \sqrt[2016]{2}$

B. $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}$

C. $A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}$

D. $A = 2017$

Giải :

Ta có : $\max P = |z| > 0 \Leftrightarrow \max P^{2017} = |z|^{2017} = |z^{2017}|$.

$\min P = |z| > 0 \Leftrightarrow \min P^{2017} = |z|^{2017} = |z^{2017}|$.

Gọi $z^{2017} = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

$\Rightarrow$ Tập hợp điểm biểu diễn số phức z^{2017} là đường tròn tâm $I(0;1)$ có bán kính $R = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \max P^{2017} = 2 \\ \min P^{2017} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max P = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2} \\ \min P = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 2017 \cdot \sqrt[2017]{2}.$$

Câu 83 : Cho số phức z, w khác 0 sao cho $|z - w| = 2|z| = |w|$. Phần thực của số phức $u = \frac{z}{w}$ là:

A. $a = -\frac{1}{8}$

B. $a = \frac{1}{4}$

C. $a = 1$

D. $a = \frac{1}{8}$

Giải :

Cách 1 :

Gọi $u = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$$\text{Ta có : } |z - w| = 2|z| = |w| \Leftrightarrow \begin{cases} |u| = \frac{|z|}{|w|} = \frac{1}{2} \\ \frac{|z - w|}{|w|} = \left| \frac{z - w}{w} \right| = |u - 1| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = \frac{1}{4} \\ (a + 1)^2 + b^2 = 1 \end{cases}.$$

$$\Rightarrow (a + 1)^2 - a^2 = 2a + 1 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}.$$

Cách 2 :

$$\text{Gọi } w = a + bi \text{ (} a, b \in \mathbb{R} \text{)}. \text{ Chọn } z = 1 \Rightarrow |z| = 1 \Rightarrow |1 - w| = 2 = |w| \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 4 \text{ (*)} \\ (a - 1)^2 + b^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Thay } a = \frac{1}{2} \text{ vào (*)} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow u = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i} = \frac{1}{8} - \frac{\sqrt{15}}{8}i.$$

Câu 84 : Cho số phức z có $|z| = \frac{1}{2}$ và số phức w thỏa $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = \frac{1}{z + w}$. Tính $|w|$:

A. $|w| = 1$

B. $|w| = 2$

C. $|w| = \frac{1}{2}$

D. $|w| = 3$

Giải :

$$\begin{aligned} \text{Chọn : } z = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} + w &= \frac{1}{\frac{1}{2} + w} \Leftrightarrow \frac{2w + 1}{2} = \frac{1}{2w + 1} \Leftrightarrow (2w + 1)^2 = 2w \\ &\Leftrightarrow 4w^2 + 2w + 1 = 0 \Rightarrow w = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i \Rightarrow |w| = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Câu 85 : Cho số phức z_1, z_2 thỏa $\frac{2}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_1 + z_2}$. Tính giá trị $P = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right|$.

A. $P = \sqrt{2}$

B. $|w| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

C. $|w| = \frac{1}{2}$

D. $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Giải :

$$\begin{aligned} \text{Chọn } \begin{cases} z_1 = 1 \\ z_2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow 2 + \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{1 + z_2} \Leftrightarrow (2z_2 + 1)(z_2 + 1) = z_2 \Leftrightarrow 2z_2^2 + 2z_2 + 1 = 0 \Rightarrow z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \\ \Rightarrow P &= \left| \frac{z_1}{z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = \frac{3\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 86 : Cho $z = a + bi$ ($a; b \in \mathbb{R}$) thỏa $|z^2 + 4| = 2|z|$ và $P = 8(b^2 - a^2) - 12$, mệnh đề nào sau đây là đúng :

- A. $P = (|z|^2 - 2)^2$ B. $P = (|z| - 2)^2$ C. $P = (|z|^2 - 4)^2$ D. $P = (|z| - 4)^2$

Giải

Ta chọn $z = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}i \Rightarrow P = 36 + 16\sqrt{5}$. Đáp án thỏa điều trên là đáp án A (dựa vào MTCT thì khoảng 1p là xong bài).

Hướng dẫn cách chọn $z = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}i$

Theo đề ta có :

$$|z^2 + 4| = 2|z| \Leftrightarrow |(a^2 - b^2 + 4) + 2abi| = 2|a + bi|$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - b^2 + 4)^2 + 4a^2b^2 = 4(a^2 + b^2)$$

Chọn $a = 0 \Rightarrow b = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$.

Câu 87 : Cho số phức z thỏa mãn $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ bên là điểm

biểu diễn của z . Biết rằng trong hình vẽ bên, điểm biểu diễn của số phức $w = \frac{1}{iz}$ là một trong bốn điểm M, N, P, Q . Khi đó điểm biểu diễn của số phức w là :

- A. Điểm Q C. Điểm M
B. Điểm N D. Điểm P

Giải :

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) là điểm biểu diễn số phức A .

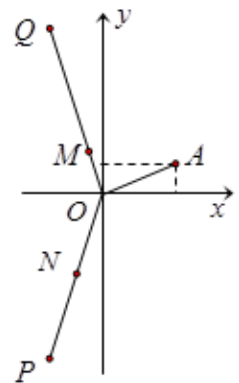
Do z thuộc góc phần tư thứ nhất trong mặt phẳng Oxy , nên $a, b > 0$.

$$\text{Lại có } w = \frac{1}{iz} = \frac{-b}{a^2 + b^2} - \frac{a}{a^2 + b^2}i$$

$\Rightarrow$ Điểm biểu diễn w nằm trong góc phần tư thứ ba của mặt phẳng Oxy .

$$|w| = \left| \frac{1}{iz} \right| = \frac{1}{|i| \cdot |z|} = \sqrt{2} = 2|z| = 2OA.$$

Vậy điểm biểu diễn của số phức w là điểm P .



Câu 88 : Cho số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 2 - 3i| + |z + 1|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $P = a + 2b$:

- A. $P = 3$ B. $P = \frac{5}{2}$ C. $P = 2$ D. $P = \frac{3}{2}$

Giải :

Ta có : $|z + 1 + i| = |z + 2i| \Leftrightarrow a - b = 1$.

$$P = |z - 2 - 3i| + |z + 1| = \sqrt{(a - 2)^2 + (b - 3)^2} + \sqrt{(a + 1)^2 + b^2}.$$

Xét trong mặt phẳng phức Oab , xét các điểm $M(a; b)$, $A(2; 3)$, $B(-1; 0)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M \in (d) : a - b - 1 = 0$.

Ta có : $MA+MB=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a+1)^2+b^2}$. Vậy ta tìm $M \in d$ sao cho $(MA+MB)_{\min}$.

Do $(x_A-y_A-1)(x_B-y_B-1)>0 \Rightarrow A, B$ cùng thuộc một phía so với đường thẳng d .

$\Rightarrow$ Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d .

Ta có : $MA+MB=MA'+MB \geq A'B$. Dấu "=" xảy ra khi $M=A'B \cap d \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P=a+2b=\frac{5}{2}$.

Câu 89 : Cho số phức $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) thỏa mãn $|z+1+i|=|z+2i|$ và $P=|z-2-3i|+|z-1+2i|$ đạt giá trị nhỏ nhất . Tính $P=a+2b$:

- B. $P=3$ B. $P=\frac{5}{2}$ C. $P=2$ D. $P=\frac{3}{2}$

Giải :

Ta có : $|z+1+i|=|z+2i| \Leftrightarrow a-b=1$.

$$P=|z-2-3i|+|z+1|=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2} .$$

Xét trong mặt phẳng phức Oab , xét các điểm $M(a;b)$, $A(2;3)$, $B(1;-2)$ với M điểm biểu diễn số phức $z \Rightarrow M \in (d): a-b-1=0$.

Ta có : $MA+MB=\sqrt{(a-2)^2+(b-3)^2}+\sqrt{(a-1)^2+(b+2)^2}$. Vậy ta tìm $M \in d$ sao cho $(MA+MB)_{\min}$.

Do $(x_A-y_A-1)(x_B-y_B-1)<0 \Rightarrow A, B$ khác phía so với đường thẳng d .

Ta có : $MA+MB \geq AB$. Dấu "=" xảy ra khi $M=AB \cap d \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow P=a+2b=\frac{5}{2}$.

Câu 90 : Cho số phức z thỏa $|z-3-4i|=2$ và $P=|z+2-i|$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của P . Tính $A=M+m$.

- A. $A=\sqrt{34}$ B. $A=\frac{\sqrt{34}}{2}$ C. $A=2\sqrt{34}$ D. $A=3\sqrt{34}$

Giải :

Gọi $z=a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) .

Ta có : $|z-3-4i|=2 \Leftrightarrow (a-3)^2+(b-4)^2=4$.

Vậy tập hợp điểm $M \in (C): (a-3)^2+(b-4)^2=4$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R=2$

Trong mặt phẳng phức xét $A(-2;1)$, ta có : $P=|z+2-i|=MA$ với $M \in (C): (a-3)^2+(b-4)^2=4$.

$$\text{Vậy : } \begin{cases} MA_{\min} = |AI - R| = \sqrt{34} - 2 \\ MA_{\max} = AI + R = \sqrt{34} + 2 \end{cases}.$$

Câu 91 : Cho số phức $z = a + bi$ thỏa $|z + 1 + i| = |z + 2i|$ và $P = |z - 3i|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $A = a + 2b$.

- B. $A = \sqrt{2}$ B. $A = 2$ C. $A = 2\sqrt{2}$ D. $A = 1$

Giải :

Gọi $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

Ta có : $|z + 1 + i| = |z + 2i| \Leftrightarrow a - b - 1 = 0$.

Vậy tập hợp điểm $M \in (\Delta) : a - b - 1 = 0$.

Trong mặt phẳng phức xét $A(0; 3) \Rightarrow P = MA$ với $M \in (\Delta)$.

Vậy $MA_{\min} = d[A; (\Delta)] = 2\sqrt{2}$.

Câu 92 : Xét số phức z thỏa $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng :

- A. $\frac{3}{2} < |z| < 2$ B. $|z| > 2$ C. $|z| < \frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$.

Giải :

Xét các điểm $A(1; 0), B(0; 1)$ và $M(x; y)$ với M là điểm biểu diễn số phức z trong mặt phẳng phức.

Ta có : $2|z - 1| + 3|z - i| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} + 3\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = 2MA + 3MB$.

Ta có : $2MA + 3MB = 2(MA + MB) + MB \geq 2AB + MB = 2\sqrt{2} + MB \geq 2\sqrt{2}$.

$\Rightarrow 2|z - 1| + 3|z - i| \geq 2\sqrt{2}$. Mà theo giả thuyết ta có : $2|z - 1| + 3|z - i| \leq 2\sqrt{2}$.

Vậy $2|z - 1| + 3|z - i| = 2\sqrt{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} M \in AB \\ MB = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \equiv B \Rightarrow M(0; 1) \Rightarrow |z| = 1$.

Câu 93 : Xét số phức z và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn là M, M' . Số phức $w = z(4 + 3i)$ và số phức liên hợp của nó có điểm biểu diễn lần lượt là N, N' . Biết rằng M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z + 4i - 5|$.

- A. $\frac{5}{\sqrt{34}}$ B. $\frac{2}{\sqrt{5}}$ C. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\frac{4}{\sqrt{13}}$

Giải :

Gọi số phức $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$).

$\Rightarrow w = (a + bi)(4 + 3i) = (4a - 3b) + (3a + 4b)i \Rightarrow \bar{w} = (4a - 3b) - (3a + 4b)i$

Ta có : M và M' đối xứng nhau qua trục Ox , N và N' đối xứng nhau qua trục $Ox \Rightarrow \begin{cases} MM' \perp Ox \\ NN' \perp Ox \end{cases}$.

Ta có : M, M', N, N' là bốn đỉnh của hình chữ nhật $MM'N'N$ hoặc $MM'NN'$.

Trong mặt phẳng phức Oab , xét điểm $A(5; -4) \Rightarrow |z + 4i - 5| = MA$

Trường hợp 1 : Với hình chữ nhật $MM'N'N$.

$$\Rightarrow MN \perp M'N' \Rightarrow MN // Ox \Rightarrow y_M = y_{N'} \Rightarrow b = (3a + 4b) \Leftrightarrow a + b = 0$$

$$\Rightarrow M \in (d_1): a + b = 0. \text{ Vậy } MA_{\min} = d[A; (d_1)] = \frac{|5 + (-4)|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Trường hợp 2 : Với hình chữ nhật $MM'NN'$.

$$\Rightarrow MN' \perp M'M \Rightarrow MN' // Ox \Rightarrow y_M = y_{N'} \Rightarrow b = -(3a + 4b) \Leftrightarrow 3a + 5b = 0$$

$$\Rightarrow M \in (d_2): 3a + 5b = 0. \text{ Vậy } MA_{\min} = d[A; (d_2)] = \frac{|3.5 + 5.(-4)|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}.$$

$$\text{Vì } d[A; (d_1)] < d[A; (d_2)] \Rightarrow MA_{\min} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 94 : Cho hàm số phức $f(z) = (4+i)z^2 + az + b$ với a, b là số phức. Biết $f(1), f(i)$ là số thực.

Tính giá trị nhỏ nhất của $P = |a| + |b|$.

A. $P = 1$

B. $P = \sqrt{2}$

C. $P = 2$

D. $P = \sqrt{3}$

Giải :

$$\text{Gọi : } \begin{cases} a = x_1 + y_1 i \\ b = x_2 + y_2 i \end{cases} (x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}).$$

$$\text{Ta có : } f(z) = (4+i)z^2 + az + b.$$

$$\Rightarrow f(1) = 4 + i + a + b = (4 + x_1 + x_2) + (y_1 + y_2 + 1)i.$$

$$\Rightarrow f(i) = -(4+i) + ai + b = (-4 - y_1 + x_2) + (-1 + x_1 + y_2)i.$$

$$\text{Do } f(1), f(i) \text{ là số thực} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + 1 = 0 \\ x_1 + y_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 - y_1 + 2 = 0.$$

Vậy để thỏa yêu cầu bài toán thì $a \in (\Delta): x - y + 2 = 0$ trong mặt phẳng Oxy còn b là số phức tự do.

$$\Rightarrow P_{\min} = |a| + |b| = d[O; (\Delta)] + 0 = \sqrt{2}.$$

Câu 95 : Cho số phức $z = a + 2bi (a, b \in \mathbb{R})$ và đa thức: $f(x) = ax^2 - bx + 1$. Biết $|f(\pm 1)| \leq 1$. Tính giá trị lớn nhất của $|z|$.

A. 2

B. $2\sqrt{2}$

C. $\sqrt{5}$

D. $\sqrt{7}$

Giải:

$$\text{Ta có: } |z| = \sqrt{a^2 + (2b)^2}.$$

$$|f(\pm 1)| \leq 1 \Leftrightarrow |a \pm b + 1| \leq 1 \Leftrightarrow |2a \pm 2b + 2| \leq 2 \quad (1).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = x \\ 2b = y \end{cases}, \text{ ta có } (1) \Leftrightarrow |2x \pm y + 2| \leq 2 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq 2x + y + 2 \leq 2 \\ -2 \leq 2x - y + 2 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 4 \geq 0 \\ 2x - y + 4 \geq 0 \\ 2x + y \leq 0 \\ 2x - y \leq 0 \end{cases} (*) .$$

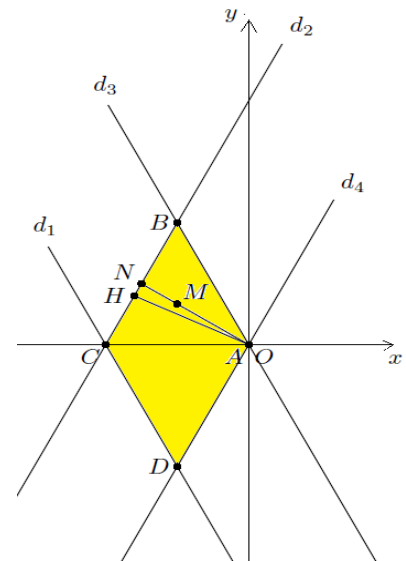
Miền nghiệm S của (*) là tứ giác $ABCD$ (kề cả cạnh). Với $A(0;0), B(-1;2), C(-2;0), D(-1;-2)$.

Dễ dàng nhận thấy $ABCD$ là hình thoi.

Gọi $M(x; y)$ là điểm biểu diễn số phức z trên mặt phẳng $Oxy \Rightarrow M$ **chạy tung tăng** trong miền S .

Ta có $|z| = OM \Rightarrow |z|_{\max} = OM_{\max}$.

Ta dễ nhận thấy $OM_{\max} = OB = OD \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{5}$. Nhưng nhóm muốn chứng minh thêm cho mọi người xem, phần chữ màu đỏ.



CHỨNG MINH :

Vì $\triangle OBC$ và $\triangle ODC$ đối xứng nhau qua trục Ox nên xét M **chạy tung tăng** trên $\triangle OBC$ ($O \equiv A$).
Gọi $N = OM \cap BC \Rightarrow OM \leq ON$ và N thuộc cạnh BC .

H là hình chiếu của O trên $BC \Rightarrow \begin{cases} HN \leq HB \\ HN \leq HC \end{cases}$.

Ta lại có HN là hình chiếu của ON trên BC .

HB là hình chiếu của OB trên BC .

HC là hình chiếu của OC trên BC .

Từ đó ta có $\begin{cases} ON \leq OB \\ ON \leq OC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OM \leq OB \\ OM \leq OC \end{cases} \Rightarrow OM_{\max} = \max\{OB; OC\}$.

Mà $\begin{cases} OB = \sqrt{5} \\ OC = 2 \end{cases} \Rightarrow OM_{\max} = OB = \sqrt{5} \Leftrightarrow M \equiv B$.

Do tính đối xứng nên $OM_{\max} \Leftrightarrow \begin{cases} M \equiv B(-1;2) \\ M \equiv D(-1;-2) \end{cases} \Rightarrow |z|_{\max} = \sqrt{5}$.