SỔ TAY GIẢI TOÁN 12

MỤC LỤC

A. KHẢO SÁT HÀM SỐ

1. Tính đơn điệu

1.1. Lí thuyết

a) Định nghĩa: Cho K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử f(x) là một hàm số xác định trên K.

- Hàm số f(x) gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Hàm số f(x) gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

b. Điều kiện cần

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng K.

- Hàm số f(x) không đổi trên K $\Leftrightarrow \forall x \in K: f'(x) = 0$
- Nếu f đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$
- Nếu f nghịch biến trên khoảng K thì $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$

c. Điều kiện đủ

Giả sử f có đạo hàm trên khoảng K.

- Nếu f′ (x) $\geq$ 0, $\forall$x $\in$ I (f′(x) = 0 tại một số hữu hạn điểm) thì f đồng biến trên K.
- Nếu f′ (x) $\leq$ 0, $\forall$x $\in$ I (f′(x) = 0 tại một số hữu hạn điểm) thì f nghịch biến trên K.
- Nếu f′(x) = 0, $\forall$x $\in$ I thì f không đổi trên K.

1. 2. Một số vấn đề khác

a) Định lí về dấu của tam thức bậc hai: $g(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

+ Nếu $\Delta < 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với *a*.

+ Nếu $\Delta = 0$ thì $g(x)$ luôn cùng dấu với *a* (trừ $x = -\dfrac{b}{2a}$), $g\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 0$

+ Nếu $\Delta > 0$ thì $g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 và trong khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ khác dấu với *a*, ngoài khoảng hai nghiệm thì $g(x)$ cùng dấu với *a*.

Chú ý: - Nếu $y' = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ thì: +) $y' \geq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$ +) $y' \leq 0, \forall x \in R \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

- Nếu $\Delta = 0$ hay $g(x) = a(x - \alpha)^2$ thì g(x) không đổi dấu khi qua α, dấu của g(x) phụ thuộc dấu của a.

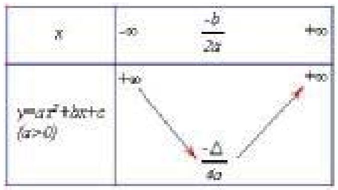
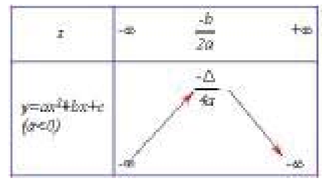
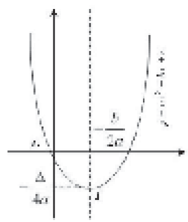
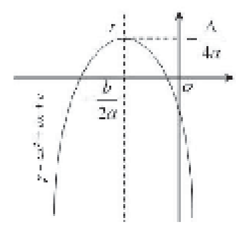
- Nếu $\Delta > 0$ thì g(x) đổi dấu khi qua x_1, x_2 (đổi từ+ sang – sang +, hoặc đổi từ - sang + sang -)

b) So sánh các nghiệm x_1, x_2 của tam thức bậc hai $g(x) = ax^2 + bx + c$ với số 0:

+) $x_1 \leq x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S < 0 \end{cases}$ +) $0 < x_1 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases}$ +) $x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P < 0$

c) Hàm số bậc hai: $y = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

a>0	a<0
Đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$	Đồ thị hàm số là một parabol có đỉnh $\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ Hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$	Hàm số nghịch biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$
$y_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}$ tại $x=-\dfrac{b}{2a}$	$y_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}$ tại $x=-\dfrac{b}{2a}$
Bảng biến thiên 	Bảng biến thiên 
Dạng đồ thị: 	Dạng đồ thị: 

d) Ứng dụng trong giải toán

Cho hàm số y=g(x) xác định trên (a;b) và liên tục trên [a;b]:

+) $g(x)\le m,\forall x\in(a;b)\Leftrightarrow \max\limits_{[a;b]} g(x)\le m$;

+) $g(x)\ge m,\forall x\in(a;b)\Leftrightarrow \min\limits_{[a;b]} g(x)\ge m$

e) Đơn điệu trên một khoảng, đoạn

Để hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên tập K nào đó thì tồn tại khoảng để *f'(x)>0* chứa tập K.

Để hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên tập K nào đó thì tồn tại khoảng để *f'(x)<0* chứa tập K

Bổ trợ: - Tập $(-\infty;a)$ là tập con của tập $(-\infty;b)$ khi và chỉ khi $a\le b$

- Tập $(a;+\infty)$ là tập con của tập $(b;+\infty)$ khi và chỉ khi $b\le a$

- *Tập $(a;b)$ là tập con của tập $(c;d)$ khi và chỉ khi* $\begin{cases}c\le a\\ b\le d\end{cases}$

1.3. Tính đơn điệu của hàm thường gặp

a) *Hàm số đa thức bậc ba* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\ne 0)$:

- *"Điều kiện để hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến trên R là* $\begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}$*; nghịch biến trên R là* $\begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}$ *"*
- *Hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ đồng biến (nghịch biến) trên K thì khoảng mà $f'(x)\ge 0$ ($f'(x)\ge 0$) của hàm số phải chứa K.*

b) *Hàm số phân thức dạng* $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d} \quad (c\ne 0, ad-bc\ne 0)$

($ad - bc < 0$)

- *Điều kiện để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên trên $(\alpha;+\infty)$ là*

  $$\begin{cases} ad - bc > 0 \quad (ad - bc < 0) \\ \alpha \le -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

- *Điều kiện để hàm số đồng biến (nghịch biến) trên trên $(-\infty;\alpha)$ là*

  $$\begin{cases} ad - bc > 0 \quad (ad - bc < 0) \\ \alpha \ge -\dfrac{d}{c} \end{cases}$$

+) Đối với hàm hợp $y = f(g(x))$, trong đó hàm $u = g(x)$ xác định và có đạo hàm trên $(a;b)$, lấy giá trị trên khoảng $(c;d)$; hàm $y = f(u)$ xác định $(c;d)$ và có đạo hàm trên $(c;d)$, lấy giá trị trên R.

- *Nếu* $\begin{cases} g'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a;b) \\ f'(u) > 0 \;\; \forall u \in (c;d) \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} g'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a;b) \\ f'(u) < 0 \;\; \forall u \in (c;d) \end{cases}$ *thì hàm số $y = f(g(x))$ đồng biến trên $(a;b)$.*

- *Nếu* $\begin{cases} g'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a;b) \\ f'(u) > 0 \;\; \forall u \in (c;d) \end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases} g'(x) < 0 \;\; \forall x \in (a;b) \\ f'(u) > 0 \;\; \forall u \in (c;d) \end{cases}$ *thì hàm số $y = f(g(x))$ nghịch biến trên $(a;b)$.*

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

2.1. Lí thuyết

a) Định nghĩa: Giả sử hàm số $f(x)$ xác định trên D, $x_0 \in D$.

- Điểm x_0 gọi là điểm cực tiểu của hàm số f(x) nếu tồn tại số thực dương h sao cho $(x_0 - h; x_0 + h)$ chứa trong D và $f(x) > f(x_o),\ x \in (x_0 - h; x_0 + h) \setminus \{x_0\}$

Khi đó:

+ Giá trị $f(x_0)$ gọi là giá trị cực tiểu của hàm số.

+ Điểm $(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số *y=f(x).*

+ Hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0

- Điểm x_0 gọi là điểm cực đại của hàm số f(x) nếu tồn tại số thực dương h sao cho $(x_0 - h; x_0 + h)$ chứa trong D và $f(x) < f(x_o),\ x \in (x_0 - h; x_0 + h) \setminus \{x_0\}$

Khi đó: Giá trị $f(x_0)$ gọi là giá trị cực đại của hàm số. Điểm $(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số y=f(x).

+ Giá trị $f(x_0)$ gọi là giá trị cực đại của hàm số.

+ Điểm $(x_0; f(x_0))$ gọi là điểm cực đại của đồ thị hàm số *y=f(x).*

+ Hàm số đạt cực đại tại điểm x_0

Chú ý: Cực đại, cực tiểu gọi chung là cực trị

b) Định lí:

Điều kiện cần: Nếu hàm số *f(x)* đạt cực trị tại điểm x_0 thì hoặc không tồn tại $f'(x_0)$ hoặc $f'(x_0)=0$

Điều kiện đủ 1: Giả sử tồn tại $(a;b)\subset D$ chứ x_0 , hàm số *y=f(x)* liên tục trên (a,b) và có đạo hàm trên mỗi khoảng $(a;x_0),(x_0;b)$

- Nếu $\begin{cases} f'(x)<0 \ \forall x\in(a;x_0) \\ f'(x)>0 \ \forall x\in(x_0;b) \end{cases}$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số *f(x)*
- Nếu $\begin{cases} f'(x)>0 \ \forall x\in(a;x_0) \\ f'(x)<0 \ \forall x\in(x_0;b) \end{cases}$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số *f(x)*

Điều kiện đủ 2: Giả sử tồn tại $(a;b)\subset D$ chứ x_0 , hàm số *y=f(x)* liên tục trên (a,b) và có đạo hàm cấp 1 trên (a;b) và có đạo hàm cấp hai tại x_0. Khi đó:

- Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số *f(x)*
- Nếu $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số *f(x)*

2.2. Một số vấn đề khác

a) Hàm số đa thức bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$:

- Hàm số đạt cực đại tại x_0 khi: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{f'(x)}>0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=0 \\ b<0 \\ -\dfrac{c}{2b}=x_0 \end{cases}$
- Hàm số đạt cực tiểu tại x_0 khi: $\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{f'(x)}>0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=0 \\ b>0 \\ -\dfrac{c}{2b}=x_0 \end{cases}$
- Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{f'(x)}\le 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=0 \\ b=0 \end{cases}$
- Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta_{f'(x)}>0 \end{cases}$
- Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$. Với điều kiện $b^2-3ac>0$, thực hiện phép chia y cho y’ ta được y = y’(x).g(x) + Ax + B. Khi đó, đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là y = Ax + B

b) Hàm số đa thức trùng phương*:* $f(x)=ax^4+bx^2+c \ (a\neq 0)$

TH1: $a=0$

*) Nếu $b>0$ Hàm số chỉ có 1 cực tiểu

*) Nếu $b<0$ Hàm số chỉ có 1 cực đại

*) Nếu $b=0$ Hàm số không có cực trị

TH2: $a \neq 0$. Khi đó: $y' = 4ax^3 + 2bx = 2x\left(2ax^2 + b\right)$

**) Nếu a.b<0 thì hàm số có ba cực trị. Cụ thể*

a>0: Hàm số có 2 cực tiểu, 1 cực đại

a<0: Hàm số có 2 cực đại, 1 cực tiểu

**) Nếu $a.b \geq 0$: Hàm số chỉ có đúng một cực trị*

a>0: Hàm số có 1 cực tiểu

a<0: Hàm số có 1 cực đại

Tham khảo: Trường hợp đồ thị hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c \quad \left(a \neq 0\right)$ có ba điểm cực trị

Ba điểm cực trị là $A\left(0;\ c\right)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$ và $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};\ c - \frac{b^2}{4a}\right)$.

Khi đó ta có $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4 - 8ab}{16a^2}}$ và $BC = \sqrt{-\frac{2b}{a}}$.

Dạng 1. *Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 8a = 0 \end{cases}$.

Dạng 2. *Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ b^3 + 24a = 0 \end{cases}$.

Dạng 3. *Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác cân có một góc $\widehat{BAC} = \alpha$ cho trước khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ \cos\alpha = \dfrac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \end{cases}$

Dạng 4. *Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn điều kiện $BC = OA$* (*với O là gốc tọa độ*) *khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ ac^2 + 2b = 0 \end{cases}$.

Dạng 5. *Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có diện tích là S cho trước khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ S = \sqrt{-\dfrac{b^5}{32a^3}} \end{cases}$.

Dạng 6. *Đồ thị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp là R khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ R = \dfrac{b^3 - 8a}{8\left|a\right|b} \end{cases}$.

Dạng 7. *Đồ thị hàm số* $y = ax^4 + bx^2 + c$ *có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác có bán kính đường tròn nội tiếp là r khi và chỉ khi* $\begin{cases} ab < 0 \\ r = \dfrac{\left|\dfrac{b^2}{4a}\right|}{\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{8a}} + 1} \end{cases}$.

Dạng 8. *Đồ thị hàm số* $y = ax^4 + bx^2 + c$ *có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác nhận gốc O là trực tâm khi và chỉ khi* $\begin{cases} b^3 + 8a - 4abc = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$

Dạng 9. *Đồ thị hàm số* $y = ax^4 + bx^2 + c$ *có ba điểm cực trị A, B, C tạo thành ba đỉnh của một tam giác nhận gốc O là tâm đường tròn ngoại tiếp khi và chỉ khi* $\begin{cases} b^3 - 8a - 8abc = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$

c) Hàm số phân thức dạng $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$ *không có cực trị*

d) Hàm số bậc 2/bậc 1 $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ có cực đại và cực tiểu khi và chỉ khi phương trình y' = 0 có hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{b'}{a'}$. Khi đó, phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$ là $y = \dfrac{2ax + b}{a'}$.

3. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

3.1. Lí thuyết

Giả sử f xác định trên $D \subset \mathbb{R}$. Ta có

$M = \max\limits_{x \in D} f(x)$ Nếu $\begin{cases} f(x) \le M \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases}$; $m = \min\limits_{x \in D} f(x)$ Nếu $\begin{cases} f(x) \ge m \ \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases}$.

3.2. Chú ý: Để tìm giá GTLN, GTNN của hàm số $y = f(x)$ liên tục đoạn $[a;b]$, có đạo hàm trên $(a;b)$ và $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm , ta làm như sau:

$\boxed{\text{B1}}$ Tìm các điểm x_1, x_2, ..., x_m thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó hàm số f có đạo hàm bằng 0 hoặc không có đạo hàm.

$\boxed{\text{B2}}$ Tính $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_m)$, $f(a)$, $f(b)$.

$\boxed{\text{B3}}$ So sánh các giá trị tìm được ở bước 2. Số lớn nhất trong các giá trị đó chính là GTLN của f trên đoạn $[a;b]$; số nhỏ nhất trong các giá trị đó chính là GTNN của f trên đoạn $[a;b]$.

$$\max\limits_{x \in [a;b]} f(x) = \max\left\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m), f(a), f(b)\right\}.$$

$$\min\limits_{x \in [a;b]} f(x) = \min\left\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_m), f(a), f(b)\right\}.$$

3.3. Quy ước. Khi nói đến GTLN, GTNN của hàm số f mà không chỉ rõ GTLN, GTNN trên tập nào thì

3.4. Chú ý: *Giả sử f(x) là một hàm số liên tục trên miền D và tồn tại* $\min\limits_{D} f(x) = m;\ \max\limits_{D} f(x) = M$ *. Khi đó:*

1) Phương trình $f(x) = \alpha$ *có nghiệm trên D* $\Leftrightarrow$ *m* $\leq \alpha \leq$ *M.*

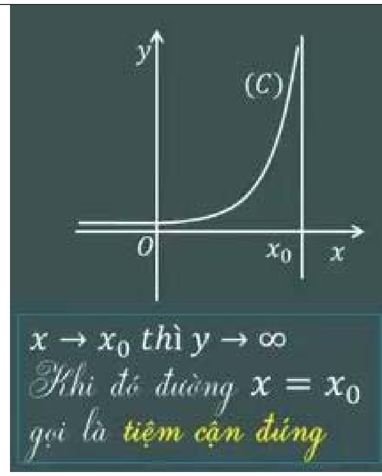
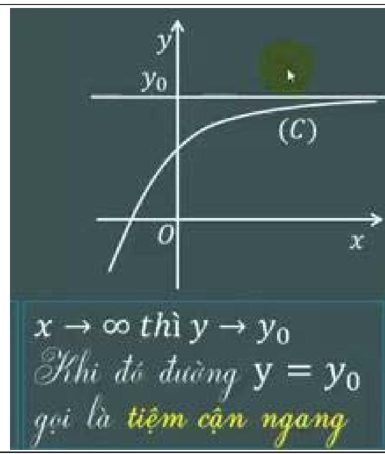
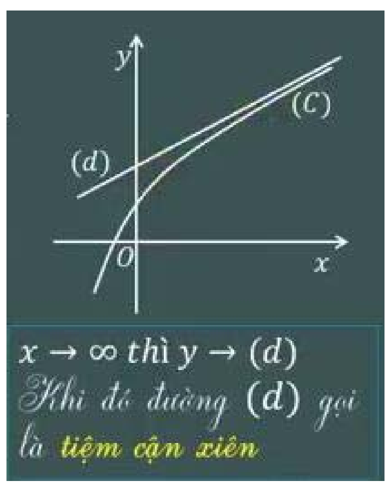
2) Bất phương trình $f(x) \geq \alpha$ *có nghiệm trên D* $\Leftrightarrow$ *M* $\geq \alpha$*.*

3) Bất phương trình $f(x) \leq \beta$ *có nghiệm trên D* $\Leftrightarrow$ *m* $\leq \beta$*.*

4) Bất phương trình f(x) $\geq \alpha$ *đúng với mọi* $x \in D$ $\Leftrightarrow$ *m* $\geq \alpha$*.*

5) Bất phương trình f(x) $\leq \beta$ *đúng với mọi* $x \in D \Leftrightarrow$ *M* $\leq \beta$*.*

4. TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Khái niệm	**Hình ảnh minh hoạ**	**Phương pháp tìm tiệm cận**
1. Tiệm cận đứng: *Đường thẳng* $x = x_0$ *(vuông góc Ox) gọi là tiệm cận đứng* của đồ thị hàm số: y=f(x) Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty,$ $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty,$		B1. Tìm tập xác định B2. Tìm các giá trị x_0 mà tại x_0 hàm số: y=f(x) không xác định. B3. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to x_0^+} y = \pm\infty$ & $\lim\limits_{x\to x_0^-} y = \pm\infty$ B4. Kết luận.
2. Tiệm cận ngang Hàm số $y = f(x)$ *xác định trên một khoảng vô hạn* (có thể là $(-\infty;a),(b;+\infty),(-\infty;+\infty)$ *Đường thẳng* $y = y_0$ *(vuông góc Oy) gọi là tiệm cận ngang* của đồ thị hàm số: y=f(x) Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = y_0, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = y_0$		B1. Tìm tập xác định B2. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y = y_0$ & $\lim\limits_{x\to-\infty} y = y_0$ B3. Kết luận
3. Tiệm cận xiên Hàm số $y = f(x)$ *xác định trên một khoảng vô hạn* (có thể là $(-\infty;a),(b;+\infty),(-\infty;+\infty)$ *Đường thẳng* $y = ax + b$ $(a \neq 0)$ *gọi là tiệm cận xiên* của đồ thị hàm số: y=f(x) Nếu có ít nhất một trong các giới hạn sau: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0.$		B1. Tìm tập xác định B2. Tính các giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = a$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - ax\right) = b$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\frac{f(x)}{x}\right) = a$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(f(x) - ax\right) = b$ B3. Kết luận

Chú ý:

1. Hàm số: $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có tiệm cận đứng là: $x = -\dfrac{d}{c}$, tiệm cận ngang là: $y = \dfrac{a}{c}$

2.Hàm số: $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n} = px + q + \dfrac{k}{mx+n}$ có tiệm cận đứng là: $x = -\dfrac{n}{m}$, tiệm cận xiên là: $y = px + q$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}=\left[\begin{array}{l} n\le m: TCĐ\ \&\ TCN \\ n>m: TCĐ\ \&\ TCX \end{array}\right.$

4. Hàm số: $y=f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\left(a>0\right)$ có tiệm cận xiên là $y=\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|$

5. Hàm số: $y=f(x)=mx+n+p\sqrt{ax^2+bx+c}$ $\left(a>0\right)$ có tiệm cận xiên là

$y=mx+n+p\sqrt{a}\left|x+\dfrac{b}{2a}\right|$

6. Hàm số: $y=\dfrac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ chỉ có tiệm cận ngang, có thể có tiệm cận đứng nếu $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm.

Bổ sung một số kiến thức:

- ***Công thức khoảng cách***: Đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$ $(a^2+b^2\ne 0)$ và $M\left(x_0;y_0\right)$.

Khoảng cách từ M đến Δ là: $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặc biệt: - Đường thẳng $\Delta: y=m$ thì $d\left(M,\Delta\right)=\left|y_0-m\right|$

- Đường thẳng $\Delta: x=n$ thì $d\left(M,\Delta\right)=\left|x_0-n\right|$

- ***Công thức giới hạn***:

+ Giới hạn tại vô cực: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{C}{x^k}=0$ $với\left(k>0\right)$ & $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=\left[\begin{array}{l} +\infty\ n\,chẵn \\ -\infty\ n\ lẻ \end{array}\right.$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n=+\infty$ $với\, n\in N$

+ Giới hạn một bên: $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{c}{x-x_0}=\left[\begin{array}{l} +\infty\ Nếu\ c>0 \\ -\infty\ Nếu\ c<0 \end{array}\right.$ & $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{c}{x-x_0}=\left[\begin{array}{l} -\infty\ Nếu\ c>0 \\ +\infty\ Nếu\ c<0 \end{array}\right.$

5. TƯƠNG GIAO HAI ĐỒ THỊ HÀM SỐ

5.1. Kiến thức

Cho hai đường cong: $\left(C_1\right): y=f(x)$ và $\left(C_2\right): y=g(x)$

+) Nếu $M(x_0;y_0)$ là điểm chung của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)\Leftrightarrow M\left(x_0;y_0\right)$ là nghiệm của hệ: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$

+ Hoành độ giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$là nghiệm của phương trình: $f(x)=g(x)$ (*)

+) Số nghiệm phương trình (*) bằng số giao điểm của $\left(C_1\right)$ và $\left(C_2\right)$

5.2 . Bổ sung một số kiến thức

a) Phương trình bậc 2

-Phương trình: $g(x)=ax^2+bx+c=0$ $\left(a\ne 0\right)$ có hai nghiệm phân biệt khác $x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0 \\ g(x_0)\ne 0\end{cases}$

-Phương trình: $g(x)=ax^2+bx+c=0$ $\left(a\ne 0\right)$ có nghiệm kép khác $x_0\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=0 \\ -\dfrac{b}{2a}\ne 0\end{cases}$

-Phương trình: $g(x)=ax^2+bx+c=0$ $\left(a\ne 0\right)$ vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta<0$

b) Phương trình bậc 3 hay tương giao đồ thị hàm đa thức bậc ba và trục Ox

Tương giao của đồ thị hàm bậc 3 $y = a'x^3 + b'x^2 + c'x + d'$ $\left(a' \neq 0\right)$ *và trục Ox:*

Phương trình hoành độ giao điểm: $a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$

***Trường hợp 1**: Biến đổi phương trình:* $a'x^3 + b'x^2 + c'x + d' = 0$ *thành* $\left(x-\alpha\right)\left(ax^2+bx+c\right)=0$

- Phương trình: $\left(x-\alpha\right)\left(ax^2+bx+c\right)=0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình:

  $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt khác α .
- Phương trình: $\left(x-\alpha\right)\left(ax^2+bx+c\right)=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình:

  $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép khác α hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng α $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(\alpha) \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \end{array}\right.$
- Phương trình: $\left(x-\alpha\right)\left(ax^2+bx+c\right)=0$ chỉ có một nghiệm $\Leftrightarrow$ Phương trình:

  $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm kép bằng α hoặc vô nghiệm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(\alpha) = 0 \end{cases} \\ \Delta < 0 \end{array}\right.$

Trường hợp 2: Không nhẩm được nghiệm α

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\left(a \neq 0\right)$ và Ox bằng số nghiệm của phương trình: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- *Chỉ có một nghiệm* khi và chỉ khi*:* Hàm số luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến; hoặc có hai cực trị nằm về cùng một phía đối với Ox$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta_{y'} \leq 0 \\ \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y(x_1).y(x_2) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$ trong đó: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $y' = 0$
- *Chỉ có hai nghiệm* khi và chỉ khi hàm số có hai cực trị, trong đó có một cực trị nằm trên Ox $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y(x_1).y(x_2) = 0 \end{cases}$ trong đó: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình: $y' = 0$
- *Chỉ có ba nghiệm phân biệt* khi và chỉ khi hàm số có hai cực trị, trong đó có hai cực trị nằm về hai phía của trục Ox$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ y(x_1).y(x_2) < 0 \end{cases}$ trong đó: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình:

  $y' = 0$

Bổ sung: Phương trình đường thẳng qua hai cực trị (nếu có) là $y = mx + n$ (Biểu thức $mx + n$ là đa thức dư khi chia y cho y').

Xét $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$

c) Phương trình bậc bốn trùng phương hay tương giao của đồ thị hàm đa thức bậc 4 trùng phương vàc trucj Ox)

$f(x)=ax^4+bx^2+c=0\ \left(a\neq 0\right)\Leftrightarrow\begin{cases}t=x^2\geq 0\\ f(t)=0\end{cases}$. t = x^2⇔ x = $\pm\sqrt{t}$

Số nghiệm	4	3	2	**1**	**0**	**CSC**
Điều kiện	$\begin{cases}\Delta>0\\ P>0\\ S>0\end{cases}$	$\begin{cases}P=0\\ S>0\end{cases}$	$\left[\begin{array}{l}P<0\\ \begin{cases}\Delta=0\\ S/2>0\end{cases}\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}P=0\\ S<0\end{cases}\\ \begin{cases}\Delta=0\\ S/2=0\end{cases}\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta\geq 0\\ P>0\\ S<0\end{cases}\\ \Delta<0\end{array}\right.$	$\begin{cases}0<t_1<t_2\\ \sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\end{cases}$

Một số kiến thức hình học bổ sung:

- Cho: $\overrightarrow{u_1}=\left(x_1;y_1\right),\overrightarrow{u_2}=\left(x_2;y_2\right)\Rightarrow\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}=x_1x_2+y_1y_2$

- Cho $A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2):\ \overrightarrow{A_1A_2}=\left(x_2-x_1;y_2-y_1\right);\ A_1A_2=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$

- Cho tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ trong đó: $A_1(x_1;y_1),\ A_2(x_2;y_2),\ A_3(x_3;y_3)$ không thẳng hàng:

+ Tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ vuông tại $A_1\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}.\overrightarrow{A_1A_3}=0$

+ Tam giác $\Delta A_1A_2A_3$ đều $\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\left|\overrightarrow{A_1A_3}\right|\\ \left|\overrightarrow{A_1A_2}\right|=\left|\overrightarrow{A_2A_3}\right|\end{cases}$

- Diện tích tam giác : $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}h.a=\frac{1}{2}b.c\sin A=pr=\frac{abc}{4R}=\sqrt{p\left(p-a\right)\left(p-b\right)\left(p-c\right)}$

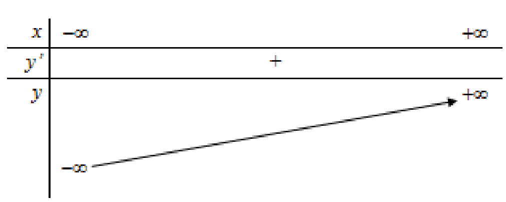
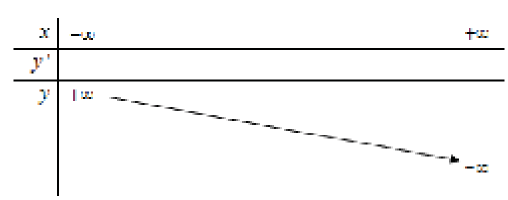
6. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

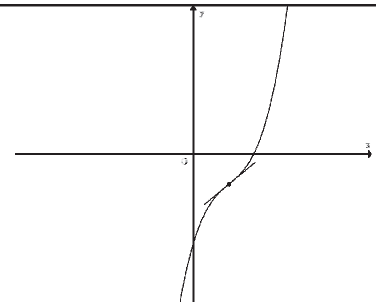
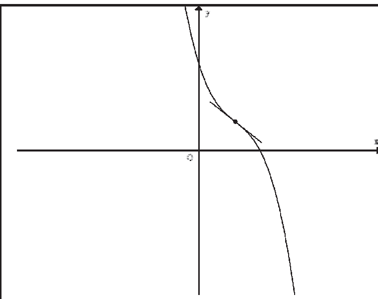
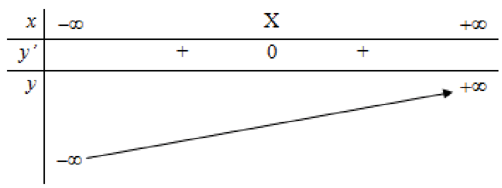
6.1. Đồ thị hàm số bậc 3

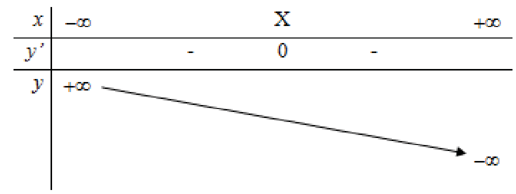
Đồ thị hàm số luôn cắt trục Ox tại ít nhất một điểm

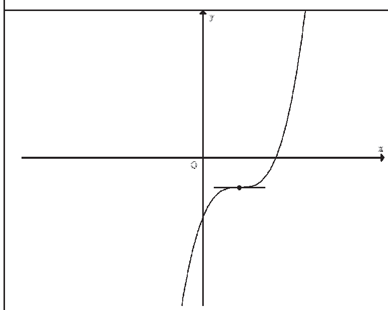
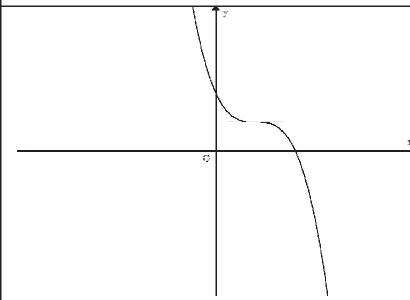
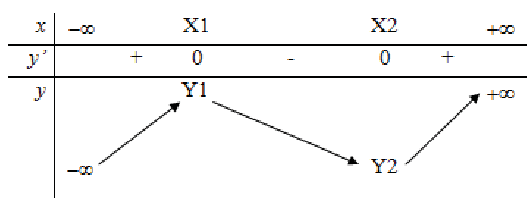
Đồ thị nhận điểm $I\left(-\frac{b}{3a};f\left(-\frac{b}{3a}\right)\right)$ là tâm đối xứng

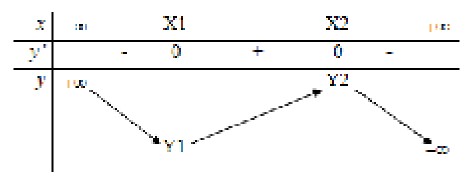
Bảng biến thiên và dạng đồ thị

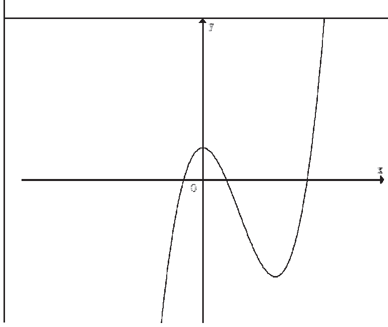
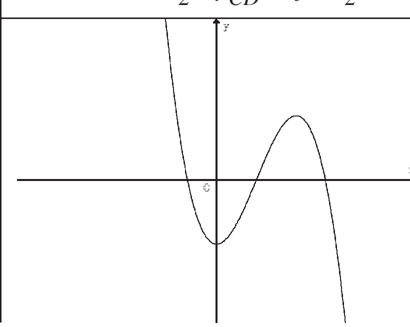
Trường hợp	**a>0**	**a<0**
$y'=0$ **vô nghiệm**	 *) Hàm số luôn đồng biến trên R *) Hàm số không có cực trị	 *) Hàm số luôn nghịch biến trên R *) Hàm số không có cực trị

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y'=0$
có nghiệm kép</td><td>

*) Hàm số luôn đồng biến trên R
*) Hàm số không có cực trị</td><td>

*) Hàm số luôn nghịch biến trên R
*) Hàm số không có cực trị</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">$y'=0$
có hai nghiệm phân biệt</td><td>

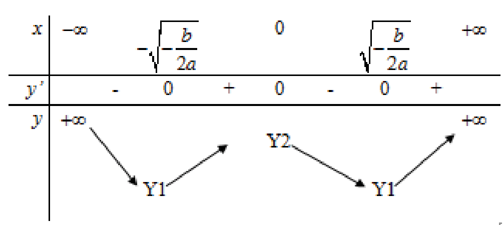
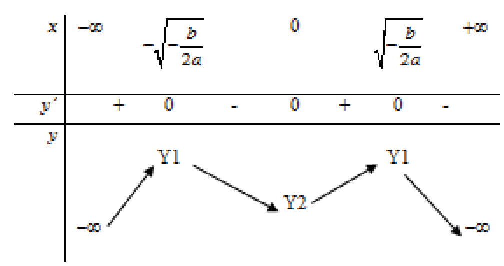
*) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;X_1)$ và $(X_2;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên $(X_1;X_2)$.
*) Hàm số đạt cực đại tại $x=X_1;\ y_{CĐ}=f(X_1)$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=X_2;\ y_{CT}=f(X_2)$.</td><td>

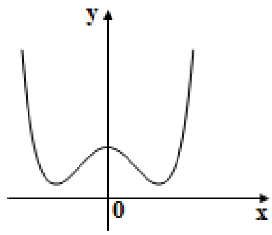
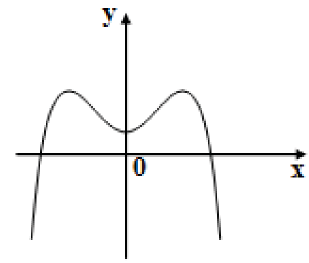
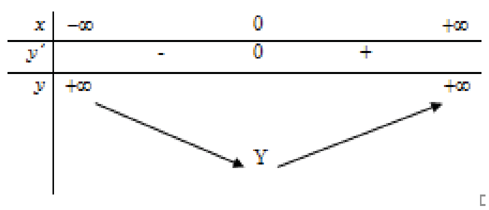
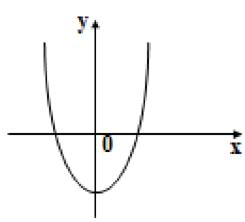
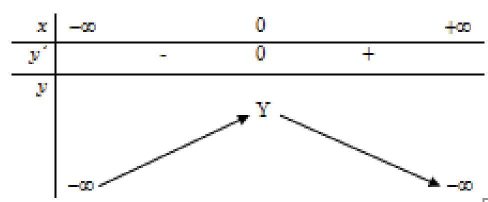
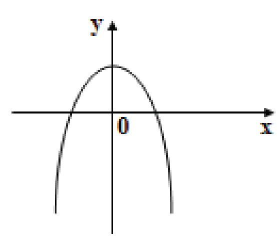
*) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;X_1)$ và $(X_2;+\infty)$. Hàm số đồng biến trên $(X_1;X_2)$.
*) Hàm số đạt cực đại tại $x=X_1;\ y_{CT}=f(X_1)$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=X_2;\ y_{CĐ}=f(X_2)$.</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

6.2. Đồ thị hàm số bậc 4 trùng phương: $f(x)=ax^4+bx^2+c\ (a\neq 0)$

- Vì hàm số là chẵn trên R nên đồ thị luôn nhận trục tung làm trục đối xứng.
- Hàm số luôn có cực trị (một cực trị nếu a.b>0 ; ba cực trị nếu a.b<0)
- Có một cực trị luôn thuộc trục Oy. Trường hợp có 3 điểm cực trị thì ba điểm cực trị là 3 đỉnh của tam giác cân.

Bảng biến thiên và dạng đồ thị

<table>
<tr><th>Các dạng</th><th>a>0</th><th>a<0</th></tr>
<tr>
<td>y' = 0 có 3 nghiệm phân biệt
⇔ PT (*) có hai nghiệm phân biệt khác 0
⇔ ab < 0</td>
<td>*) Đơn điệu
Hàm số đồng biến trên các khoảng
$\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};0\right)$ và $\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};+\infty\right)$
Hàm số nghịch biến trên các khoảng
$\left(-\infty;-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$ và $\left(0;\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$
* Cực trị
Hàm số đạt cực tiểu tại : $x_{CT}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
và $y_{CT}=Y_1=f(x_{CT})$ .Hàm số đạt cực đại tại $x_{CĐ}=0$ và $y_{CĐ}=Y_2=c$.
* Giới hạn
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty\ \text{Nếu}\ a<0\\+\infty\ \text{Nếu}\ a>0\end{array}\right.$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty\ \text{Nếu}\ a<0\\+\infty\ \text{Nếu}\ a>0\end{array}\right.$
Đồ thị hàm số không có tiệm cận
*) Bảng BT

3. Đồ thị</td>
<td>*) Đơn điệu
Hàm số nghịch biến trên các khoảng
$\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}};0\right)$ và $\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}};+\infty\right)$
Hàm số đồng biến trên các khoảng
$\left(-\infty;-\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$ và $\left(0;\sqrt{-\frac{b}{2a}}\right)$
* Cực trị
Hàm số đạt cực tiểu tại : $x_{CĐ}=\pm\sqrt{-\frac{b}{2a}}$
và $y_{CĐ}=Y_1=f(x_{CĐ})$ .Hàm số đạt cực đại tại $x_{CT}=0$ và $y_{CT}=Y_2=c$.
* Giới hạn
$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty\ \text{Nếu}\ a<0\\+\infty\ \text{Nếu}\ a>0\end{array}\right.$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty\ \text{Nếu}\ a<0\\+\infty\ \text{Nếu}\ a>0\end{array}\right.$
Đồ thị hàm số không có tiệm cận
*) Bảng BT

3. Đồ thị</td>
</tr>
</table>

		
y' = 0 chỉ có 1 nghiệm $\Leftrightarrow$ PT (*) vô nghiệm hoặc chỉ có một nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow$ ab > 0	***) Đơn điệu** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ *** Cực trị** Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CT}=0$ và $y_{CT}=Y_2=c$. *** Giới hạn** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty \text{ Nếu } a<0\\+\infty \text{ Nếu } a>0\end{array}\right.$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty \text{ Nếu } a<0\\+\infty \text{ Nếu } a>0\end{array}\right.$ ***) Bảng BT**  Đồ thị hàm số không có tiệm cận **3. Đồ thị** 	***) Đơn điệu** Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(0;+\infty)$ *** Cực trị** Hàm số đạt cực tiểu tại $x_{CĐ}=0$ và $y_{CĐ}=Y_2=c$. *** Giới hạn** $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty \text{ Nếu } a<0\\+\infty \text{ Nếu } a>0\end{array}\right.$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ax^4+bx^2+c\right)=\left[\begin{array}{l}-\infty \text{ Nếu } a<0\\+\infty \text{ Nếu } a>0\end{array}\right.$ ***) Bảng BT**  Đồ thị hàm số không có tiệm cận **3. Đồ thị** 

***6.3.Đồ thị hàm số phân thức** dạng* $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

Bảng biến thiên và dạng đồ thị

$ad-bc>0$	$ad-bc<0$
***)Đơn điệu** Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$ và	***)Đơn điệu** Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{d}{c}\right)$

$\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$

) Cực trị

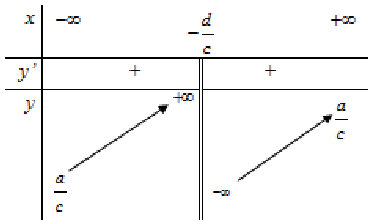
Hàm số không có cực trị

) Giới hạn

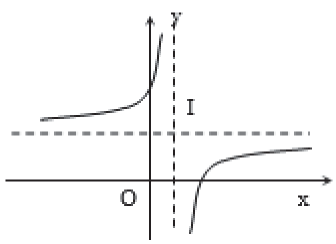
$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y=-\infty$ nên đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{a}{c}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{a}{c}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang

***) Bảng biến thiên** :*



3. Đồ thị



và $\left(-\dfrac{d}{c};+\infty\right)$

) Cực trị

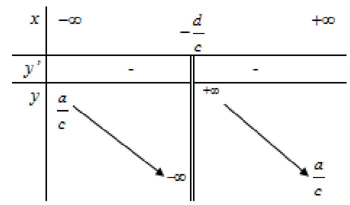
Hàm số không có cực trị

) Giới hạn

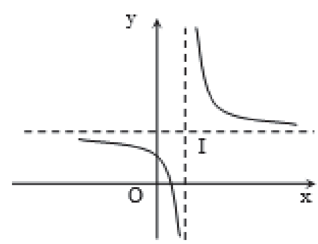
$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^-} y=-\infty$ và $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{d}{c}\right)^+} y=+\infty$ nên đường thẳng $x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\dfrac{a}{c}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{a}{c}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang

) Bảng biến thiên :



3. Đồ thị



7. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN

Dạng 1. Phương trình tiếp tuyến của đường cong (C): $y=f(x)$ tại tiếp điểm M$\left(x_0;y_0\right)$ có dạng:

$$\boxed{d: y=f'_{(x_0)}\left(x-x_0\right)+y_0}$$

Áp dụng trong các trường hợp sau:

Trường hợp	***Cần tìm***	***Ghí chú***
1. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) **tại** điểm $M\left(x_0;y_0\right)$.	Hệ số góc : $f'\left(x_0\right)$	
2. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có hoành độ $x=x_0$	Hệ số góc : $f'\left(x_0\right)$ Tung độ tiếp điểm $y_0=f\left(x_0\right)$	Từ $x_0 \Rightarrow \begin{cases} f'\left(x_0\right) \\ f\left(x_0\right)\end{cases}$
3. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm có tung độ $y=y_0$	Hoành độ tiếp điểm x_0 Hệ số góc : $f'\left(x_0\right)$	Giải phương trình $y_0=f\left(x_0\right)$
4. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C) , biết hệ số góc k của tiếp tuyến d .	Hoành độ tiếp điểm x_0 Tung độ tiếp điểm $y = f\left(x\right)$	Giải phương trình $f'\left(x_0\right)=k$

Chú ý: Gọi k_1 là hệ số góc của đường thẳng d_1 và k_2 là hệ số góc của đường thẳng d_2

Nếu d_1 song song với d_2 thì $k_1 = k_2$

Nếu d_1 vuông góc với d_2 thì $k_1.k_2 = -1$

Dạng 2 (tham khảo). Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong (C) đi qua điểm A$\left(x_1; y_1\right)$

Phương pháp: *Bước 1*. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A và có hệ số góc k

$$d: y = k\left(x - x_1\right) + y_1$$

Bước 2. Tìm điều kiện để d là tiếp tuyến của đường cong (C) :

d tiếp xúc với đường cong (C) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = k\left(x - x_1\right) + y_1 \\ f'\left(x\right) = k \quad (*) \end{cases}$ ***có nghiệm***.

Bước 3. Khử k, tìm x, thay x vào (*) để tìm k, từ đó suy ra các tiếp tuyến cần tìm

B. MŨ – LOGARIT

1. Định nghĩa và các công thức luỹ thừa và mũ

a) Lũy thừa

Số mũ α	**Cơ số a**	**Luỹ thừa a^α**
$\alpha = n \in N^*$	$a \in R$	$a^\alpha = a^n = a.a......a$ *(n thừa số a)*
$\alpha = 0$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^0 = 1$
$\alpha = -n(n \in N^*)$	$a \neq 0$	$a^\alpha = a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$\alpha = \frac{m}{n}(m \in Z, n \in N, n \geq 2)$	$a > 0$	$a^\alpha = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ $(\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a)$
$\alpha = \lim r_n$ $(r_n \in Q, n \in N^*)$	$a > 0$	$a^\alpha = \lim a^{r_n}$

2. Các phép toán: Với a và b là những số thực dương, α và β là những số thực tùy ý, ta có

$$a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta} \qquad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \qquad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha.\beta} = (a^\beta)^\alpha \qquad (ab)^\alpha = a^\alpha.b^\alpha \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$$

3. So sánh:

Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$; Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$

Với 0 < a < b ta có: $a^m < b^m \Leftrightarrow m > 0$; $a^m > b^m \Leftrightarrow m < 0$

b) Căn bậc n:

- *Khái niệm* : Căn bậc *n* của *a* là số *b* sao cho $b^n = a$.
- Với *a, b* $\geq$ *0, m, n* $\in$ *N*, p, q* $\in$ *Z* ta có:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}\ ; \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}(b > 0)\ ; \qquad \sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p (a > 0) \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

- Nếu $\frac{p}{n} = \frac{q}{m}$ *thì* $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[m]{a^q}$ $(a > 0)$ *Đặc biệt* $\sqrt[n]{a} = \sqrt[mn]{a^m}$

  - Nếu *n* là số nguyên dương lẻ và *a < b* thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

  - Nếu *n* là số nguyên dương chẵn và *0 < a < b* thì $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

Chú ý: + Khi n lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n. Kí hiệu $\sqrt[n]{a}$.

+ Khi n chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau, căn có giá trị dương ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$

$$+ \ \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \textit{khi n lẻ} \\ |a| & \textit{khi n chẵn} \end{cases}$$

2. Định nghĩa và các công thức lôgarit

*** Định nghĩa** *:* $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b$

*** Phép toán** *: Với a, b > 0; a* $\neq$ *1; b_1, b_2 > 0;* $\alpha \in R$ *ta có:*

$$\log_a 1 = 0\ ; \qquad \log_a a = 1\ ; \qquad \log_a a^b = b\ ; \qquad a^{\log_a b} = b$$

*** So sánh:** Nếu *a > 1* thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b > c$. Nếu *0 < a < 1* thì $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow b < c$

*** Phép toán**: $\log_a(b_1b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ $\log_a\left(\frac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$ $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$

*** Đổi cơ số** : Với *a, b, c > 0 và a, b ≠ 1,* ta có:

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c = \log_a c$ $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ $\log_{a^\alpha} c = \frac{1}{\alpha}\log_a c \ (\alpha \neq 0)$

*** Logarit thập phân**: $\lg b = \log b = \log_{10} b$

*** Logarit tự nhiên** (logarit Nepe): $\ln b = \log_e b$ (với $e = \lim\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,718281......$)

3. HÀM SỐ LŨY THỪA

*** Dạng:** $y = x^\alpha, \quad \alpha \in R$

*** Tập xác định: D**

- α nguyên dương thì TXĐ là D = R
- α nguyên âm hoặc bằng 0 thì TXĐ là D = R \ {0}.
- α không là số nguyên thì TXĐ là D = (0; +∞).

*** Đạo hàm :** $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$ (∀x ∈ **D**) . $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$ với u là hàm hợp.

*** Tính đơn điệu :** trên khoảng (0 ; +∞) hàm số đồng biến nếu α >0 và nghịch biến nếu α < 0 .

****Đồ thị :***

- Luôn đi qua điểm (1; 1)
- $\alpha \geq 0$ đồ thị không có tiệm cận.
- α < 0 đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy.

* ***Chú ý:*** *Hàm số* $y = x^{\frac{1}{n}}$ *không đồng nhất với hàm số* $y = \sqrt[n]{x}$ $(n \in N^*)$.

$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ *(với x > 0 khi n chẵn và x≠ 0 khi n lẻ)* $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

4. HÀM SỐ MŨ

*** Dạng:** $y = a^x$ *(a > 0, a ≠ 1).*

*** Tập xác định:** D = R.

*** Tập giá trị:** T = (0; +∞).

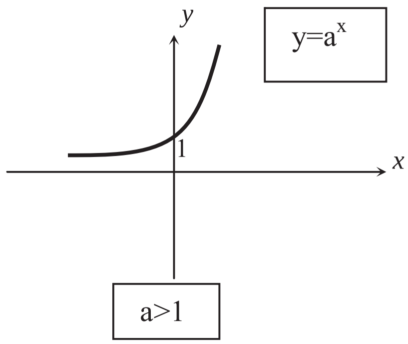
*** Đạo hàm:** $\left(e^x\right)' = e^x$ $\left(e^u\right)' = e^u.u'$ $\left(a^x\right)' = a^x.\ln a$ $\left(a^u\right)' = a^u.u'.\ln a$

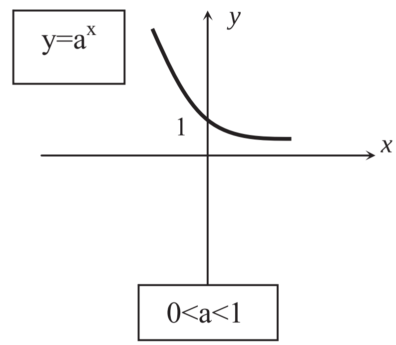
*** Tính đơn điệu:**

- Khi a > 1 hàm số đồng biến trên R.
- Khi 0 < a < 1 hàm số nghịch biến trên R.

*** Đồ thị:**

- Luôn đi qua các điểm (0; 1) ; (1 ; a)
- đồ thị có tiệm cận ngang là trục Ox.





Chú ý: Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

5. HÀM SỐ LÔGARIT

* **Dạng:** $y=\log_a x$ *(a > 0, a ≠ 1)*

* **Tập xác định**: D = (0; +∞).

* **Tập giá trị:** T = R.

* **Đạo hàm:** $\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}$ (x ≠0); $\left(\ln|u|\right)' = \frac{u'}{u}$

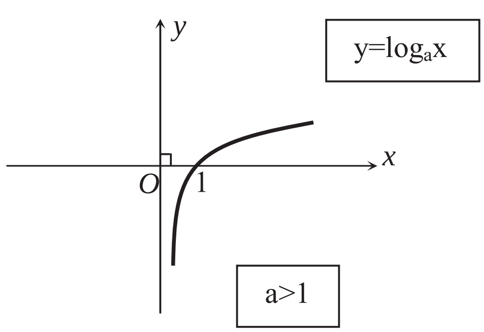
$\left(\log_a|x|\right)' = \frac{1}{x\ln a}$ (x≠0) $\left(\log_a|u|\right)' = \frac{u'}{u\ln a}$

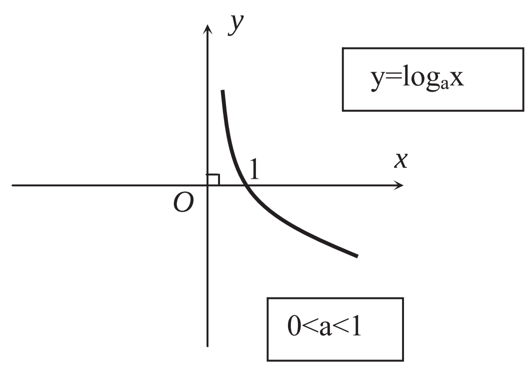
* **Tính đơn điệu:**

- Khi a > 1 hàm số đồng biến trên (0; +∞).
- Khi 0 < a < 1 hàm số nghịch biến trên (0; +∞).

* **Đồ thị:**

- Luôn đi qua điểm (1; 0) và (a ; 1).
- đồ thị có tiệm cận đứng là trục Oy.





Chú ý **:** Giới hạn đặc biệt: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

6. PHƯƠNG TRÌNH MŨ

6.1. Phương trình mũ cơ bản: Với a > 0, a ≠ 1: $a^x = b \Leftrightarrow \begin{cases} b>0 \\ x=\log_a b\end{cases}$

6.2. Một số phương pháp giải phương trình mũ

a) Đưa về cùng cơ số: Với a > 0, a ≠ 1: $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x)$

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số có chứa ẩn số thì:* $a^M = a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) = 0$

b) Logarit hoá: $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = \left(\log_a b\right).g(x)$

c) Đặt ẩn phụ:

- ***Dạng 1***: $P(a^{f(x)}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^{f(x)},\ t > 0 \\ P(t) = 0 \end{cases}$, trong đó *P(t)* là đa thức theo *t*.
- ***Dạng 2***: $\alpha a^{2f(x)} + \beta (ab)^{f(x)} + \gamma b^{2f(x)} = 0$ Chia 2 vế cho $b^{2f(x)}$, rồi đặt ẩn phụ $t = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{f(x)}$
- ***Dạng 3***: $a^{f(x)} + b^{f(x)} = m$, với $ab = 1$. Đặt $t = a^{f(x)} \Rightarrow b^{f(x)} = \dfrac{1}{t}$

d) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Xét phương trình: *f(x) = g(x)* *(1)*

- Đoán nhận x_0 là một nghiệm của (1).
- Dựa vào tính đồng biến, nghịch biến của *f(x)* và *g(x)* để kết luận x_0 là nghiệm duy nhất:
- Nếu *f(x)* đồng biến (hoặc nghịch biến) thì $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$

Cần nhớ:

+) a>1: Hàm số $y = a^x$ đồng biến (nghĩa là: Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$)

+) 0<a<1: Hàm số $y = a^x$ nghịch biến (nghĩa là: Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$

+) Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên I.

- Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến trên I;
- Nếu $f'(x) < 0$ thì hàm số nghịch biến trên I.

+) Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên I. Nếu $y = f(x)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến thì $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

e) Đưa về phương trình các phương trình đặc biệt

- **Phương trình tích** A.B = 0 $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$
- **Phương trình** $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$

f) Phương pháp đối lập : Xét phương trình: *f(x) = g(x)* *(1)*

Nếu ta chứng minh được: $\begin{cases} f(x) \ge M \\ g(x) \le M \end{cases}$ thì (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

g) **Phương pháp phân tích thành tích:**

$$uv + au + bv + ab = 0 \Leftrightarrow \left(v + a\right)\left(u + b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = -a \\ u = -b \end{array}\right.$$

7.BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ

Khi giải các bất phương trình mũ ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số mũ.

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:*

$$a^M > a^N \Leftrightarrow (a-1)(M-N) > 0$$

8. PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:

8.1. Phương trình logarit cơ bản: Với a > 0, a ≠ 1: $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$

8.2. Một số phương pháp giải phương trình logarit

8.3. Dạng cơ bản

Dạng 1: Phương trình dạng $\log_a f(x) = \log_a g(x);\ 0 < a \neq 1$

Phương pháp giải:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Dạng 2: Phương trình dạng : $\log_a f(x) = b$

Phương pháp giải:

Phương trình $\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b$

Dạng 3: Phương trình có dạng

$\log_a f(x) = \log_b g(x)\ \ (0 < a, b \neq 1)$

Phương pháp giải:

+) $\log_a f(x) = \log_b g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = a^t \\ g(x) = b^t \end{cases}$

Khử ẩn x để đưa về phương trình mũ ẩn t.

+) $\log_{f(x)} g(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = [f(x)]^a \\ f(x)\,;\ g(x) > 0;\ f(x) \neq 1 \end{cases}$

Dạng 4: Phương trình dạng

+) $f(\log_a x) = 0\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a x \\ f(t) = 0 \end{cases}$

+) $f[\log_a g(x)] = 0\ (0 < a \neq 1) \Leftrightarrow \begin{cases} t = \log_a g(x) \\ f(t) = 0 \end{cases}$

8.4. Một số phương pháp giải phương trình mũ:

a) Phương pháp đưa về cùng cơ số

Cần nhớ các công thức biến đổi sau:

1. $a^{m+n} = a^m.a^n$ **2**. $a^{m-n} = \dfrac{a^m}{a^n}$ **3**. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ **4**. $a^{nx} = \left(a^x\right)^n$ **5**. $a^{\frac{x}{n}} = \sqrt[n]{a^x}$ **6**. $a^{-nx} = \dfrac{1}{\left(a^x\right)^n}$

b) Phương pháp lôgarit hoá

Sử dụng một số công thức sau:

1. $\log_a(x.y) = \log_a x + \log_a y\quad (x, y > 0, 0 < a \neq 1)$ **2**. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y\quad (x, y > 0, 0 < a \neq 1)$

3. $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x\quad (x > 0, 0 < a \neq 1)$ **4**. $\log_{a^\alpha} x = \dfrac{1}{\alpha}\log_a x\quad (x > 0, 0 < a \neq 1, \alpha \neq 0)$

5. $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}\quad (0 < a, c \neq 1, b > 0)$ **6.** $\log_{a^\beta} x^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}\log_a x\quad (x > 0, 0 < a \neq 1, \beta \neq 0)$

Chú ý: $\log_a x^{2n} = 2n\log_a |x|\quad \forall x \neq 0$

c) Phương pháp đặt ẩn phụ

+ Đặt ẩn phụ hoàn toàn:

Cần nhớ một số công thức sau:

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a} \quad \left(0 < a, c \neq 1, b > 0\right)$, $\log_{a^\beta} x^\alpha = \dfrac{\alpha}{\beta}\log_a x \quad \left(x > 0, 0 < a \neq 1, \beta \neq 0\right)$

Đặt $t = \log_a x$. Một số công thức biến đổi

+ Đặt ẩn phụ không hoàn toàn

Sử dụng biệt thức Δ cho tam thức bậc 2 ẩn t, trong đó $t = \log_a x$ để phân tích thành tích

d) Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

Cần nhớ:

+) a>1: Hàm số $y = \log_a x$ đồng biến trên R_+ (nghĩa là: Nếu $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$)

+) 0<a<1: Hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến trên R_+ (nghĩa là: Nếu $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$

+) Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục, có đạo hàm trên I.

- Nếu $f'(x) > 0$ thì hàm số đồng biến trên I;
- Nếu $f'(x) < 0$ thì hàm số nghịch biến trên I.

+) Hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục và có đạo hàm trên I. Nếu $y = f(x)$ luôn đồng biến hoặc luôn nghịch biến thì $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v$

+) Đạo hàm: $\left(\log_a u\right)' = \dfrac{u'}{u\ln a}$

e) Phương pháp đối lập: Giả sử cần giải phương trình: $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ ta chỉ ra: $\begin{cases} f(x) \geq M \\ g(x) \leq M \end{cases}$

khi đó: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = M \\ g(x) = M \end{cases}$

f) Phương pháp phân tích thành tích:

$uv + au + bv + ab = 0 \Leftrightarrow \left(v + a\right)\left(u + b\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = -a \\ u = -b \end{array}\right.$

Chú ý:

- *Khi giải phương trình logarit cần chú ý điều kiện để biểu thức có nghĩa.*
- *Với a, b, c > 0 và a, b, c ≠ 1:* $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

9. BẤT PHƯƠNG TRÌNH LOGARIT:

Khi giải các bất phương trình logarit ta cần chú ý tính đơn điệu của hàm số logarit.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > g(x) > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \end{array}\right.$$

Chú ý: *Trong trường hợp cơ số a có chứa ẩn số thì:*

$\log_a B > 0 \Leftrightarrow (a-1)(B-1) > 0$; $\quad \dfrac{\log_a A}{\log_a B} > 0 \Leftrightarrow (A-1)(B-1) > 0$.

10. MỘT SỐ BÀI TOÁN THỰC TẾ

10.*1. LÃI ĐƠN*

Số tiền lãi chỉ tính trên số tiền gốc mà không tính trên số tiền lãi mà số tiền gốc sinh ra

Công thức tính lãi đơn : $T_n = M\left(1 + r.n\right)$

Với T_n : số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn ;

M : số tiền vốn ban đầu.

r : Lãi suất định kỳ (tính theo %)

n : số kỳ hạn tính lãi.

10.2. LÃI KÉP

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do số tiền gốc sinh ra thay đổi theo từng định kỳ.

a) Lãi kép gửi một lần : Công thức tính lãi kép : $T_n = M\left(1 + r\right)^n$

Với T_n : số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn ;

M : số tiền vốn ban đầu.

r : Lãi suất định kỳ (tính theo %)

n : số kỳ hạn tính lãi.

b) Lãi kép, gửi định kỳ :

****Trường hợp 1** : Tiền được gửi vào cuối mỗi tháng*

Cuối tháng thư nhất người đó bắt đầu gửi tiền : T_1 = M

Cuối tháng thứ hai ngườiđó có số tiền là : M(1 + r) + M = M[(1+r) + 1] = $\frac{M}{r}[(1+r)^2-1]$

Cuối tháng thứ ba ngườiđó có số tiền là : $\frac{M}{r}[(1+r)^2-1]$ (1+r) + M= $\frac{M}{r}[(1+r)^3-1]$

Cuối tháng thứ n ngườiđó có số tiền là : $T_n = \frac{M}{r}[(1+r)^n-1]$

****Trường hợp 2** : Tiền được gửi vào đầu mỗi tháng*

Cuối tháng thứ n ngườiđó có số tiền là : $T_n = \frac{M}{r}[(1+r)^n-1](1+r)$

c) Vay trả góp : Vay A, lãi suất r, số kì vay n, trả hàng kì : M

$$T_n = A\left(1+r\right)^n - \frac{M}{r}[(1+r)^n-1]$$

d) Tăng lương : Khởi điểm A, tỉ lệ tăng hàng kì : r, số lần tăng lương : n

Tổng tiền : $T_n = \frac{A}{r}[(1+r)^n-1]$ và tiền lương ở kì tăng lương thứ n là $T_n = A\left(1 + r\right)^n$

C. NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

I. LÍ THUYẾT NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN

1. Nguyên hàm cơ bản

$\int (ax+b)^{\alpha}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\left(\frac{ax+b}{\alpha+1}\right)^{\alpha+1} + c, \alpha \neq -1$	$\int \cos(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert + c\ \ + c$	$\int \sin(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{-1}{a}\cos(ax+b) + c$
$\int e^{ax+b}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}e^{ax+b} + c$	$\int \mathrm{tg}(ax+b)\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
$\int m^{ax+b}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a\ln m}m^{ax+b} + c$	$\int \mathrm{cotg}(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin^2(ax+b)} = \frac{-1}{a}\mathrm{cotg}(ax+b) + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\cos^2(ax+b)} = \frac{1}{a}\mathrm{tg}(ax+b) + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2 \pm a}\right) + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left\lvert\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right\rvert + c$
$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\frac{ax+b}{2}\right\rvert + c$	$\int \ln(ax+b)\,\mathrm{dx} = \left(x+\frac{b}{a}\right)\ln(ax+b) - x + c$
$\int e^{ax}\cos bx\,\mathrm{dx} = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2+b^2} + c$	$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(ax+b)} = \frac{1}{a}\ln\left\lvert\mathrm{tg}\frac{ax+b}{2}\right\rvert + c$
$\int e^{ax}\sin bx\,\mathrm{dx} = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + c$	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$
$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert\tan\frac{x}{2}\right\rvert + C$	$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + C$
$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a}{2}\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + C$	

2. Tích phân

- *Cho hàm số f liên tục trên K và a, b ∈ K. Nếu F là một nguyên hàm của f trên K thì:*

F(b) – F(a) *được gọi l* ***tích phân của f từ a đến b*** và kí hiệu là $\int_a^b f(x)dx$: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$

• *Đối với biến số lấy tích phân, ta có thể chọn bất kì một chữ khác thay cho x, tức là:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ... = F(b) - F(a)$$

• ***Ý nghĩa hình học****:*

Nếu hàm số y = f(x) liên tục và không âm trên đoạn [a; b] thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi đồ thị của y = f(x), trục Ox và hai đường thẳng x = a, x = b là: $\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$

3. Tính chất của tích phân

- $\int_0^0 f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ *(k: hằng số)*
- $\int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- *Nếu f(x) ≥ 0 trên [a; b] thì* $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- *Nếu f(x) ≥ g(x) trên [a; b] thì* $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$
- *Nếu* $m \leq f(x) \leq M$ *trên [a; b] thì* $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

4. Phương pháp tính tích phân

a) Phương pháp đổi biến số: $\boxed{\int_a^b f\left[u(x)\right].u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du}$ *trong đó: u = u(x) có đạo hàm liên tục trên K, y = f(u) liên tục và hàm hợp f[u(x)] xác định trên K, a, b ∈ K.*

b) Phương pháp tích phân từng phần

Nếu u, v là hai hàm số có đạo hàm liên tục trên K, a, b ∈ K thì: $\boxed{\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu}$

Chú ý: *– Cần xem lại các phương pháp tìm nguyên hàm.*

– Trong phương pháp tích phân từng phần, ta cần chọn sao cho $\int_a^b vdu$ *dễ tính hơn* $\int_a^b udv$.

– Khi tính $\int_a^b f(x)dx$ *cần chú ý xem hàm số y = f(x) có liên tục trên* $\left[a;b\right]$ *không ? Nếu có thì áp dụng phương pháp đã học để tính tích phân. Nếu không kết luận tích phân không tồn tại.*

II. PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

Phương pháp 1: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến

Dạng 1: *Giả sử cần tính tích phân:* $\int_a^b f(x)dx$ *. Nếu* $f(x) = f\left[u(x)\right].u'(x)$ *thì :* $\int_a^b f(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du$

Dạng 2: *Giả sử cần tính tích phân:* $\int_a^b f(x)dx$ *. Nhưng tính theo dạng 1 không được, lúc này ta chuyển về hàm lượng giác. Ta thường gặp các dạng sau:*

$$\left.\begin{matrix} \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \end{matrix}\right\rangle$$ *Đặt* $x = |a|\sin t$ *hoặc đặt :* $x = |a|\cos t$

$\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\\ \int\frac{1}{a^2+x^2}dx\end{array}\right\rangle$ *Đặt* $x=|a|\tan t$ *hoặc đặt :* $x=|a|\cot t$

$\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}dx\end{array}\right\rangle$ *Đặt* $x=\frac{|a|}{\sin t}$ *hoặc đặt* $x=\frac{|a|}{\cos t}$

DẠNG	CÁCH ĐỔI BIẾN
$\int f\left(ax+b\right)dx$	Đặt $t=ax+b$
$\int f(x^{n+1}).x^n dx$	Đặt $t=x^{n+1}$
$\int f\left(\sqrt{x}\right).\frac{dx}{\sqrt{x}}$	Đặt $t=\sqrt{x}$
$\int f\left(\sin x\right)\cos xdx$	Đặt $t=\sin x$
$\int f\left(\cos x\right)\sin xdx$	Đặt $t=\cos x$
$\int f\left(\tan x\right)\frac{dx}{\cos^2 x};\int f\left(\tan x\right)\left(1+\tan^2 x\right)dx$	Đặt $t=\tan x$
$\int f\left(\cot x\right)\frac{dx}{\sin^2 x};\int f\left(\cot x\right)\left(1+\cot^2 x\right)dx$	Đặt $t=\cot x$
$\int f\left(e^x\right).e^x dx$	Đặt $t=e^x$
$\int f\left(\ln x\right)\frac{dx}{x}$	Đặt $t=\ln x$
$\int f\left(x\pm\frac{1}{x}\right).\left(x\pm\frac{1}{x}\right)dx$	Đặt $t=x\pm\frac{1}{x}$

Phương pháp 2: Tính tích phân bằng phương pháp tích phân từng phần

Với P(x) là đa thức ẩn x, có các dạng sau:

	$\int_a^b P(x).e^x dx$	$\int_a^b P(x).\cos xdx$	$\int_a^b P(x).\sin xdx$	$\int_a^b P(x).\ln xdx$
Đặt $u=$	*P(x)*	*P(x)*	*P(x)*	*lnx*
Đặt $dv=$	$e^x dx$	$\cos xdx$	$\sin xdx$	*P(x)*

Thứ tự ưu tiên đặt u trong phương pháp Nguyên hàm từng phần:

Lôgarít $\rightarrow$ Đa thức $\rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}\sin x,\cos x\\ e^x\end{array}\right.$ $\begin{array}{l}\text{(Hàm lượng giác)}\\ \text{(Hàm mũ)}\end{array}$

IV. TÍCH PHÂN HÀM HỮU TỈ

- Loại 1: *Nếu bậc của P(x) ≥ bậc của Q(x) thì ta thực hiện phép chia đa thức.*

- Loại 2: *Nếu bậc của P(x) < bậc của Q(x) và Q(x) có dạng tích nhiều nhân tử thì ta phân tích f(x) thành tổng của nhiều phân thức (bằng phương pháp hệ số bất định).*

Các dạng dùng phöông phaùp heä soá baát ñònh thường gặp:

Dạng 1: Mẫu số có nghiệm đơn:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{(x-c)}$$

Dạng 2: Mẫu số có nghiệm đơn và bậc 2 vô nghiệm:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-m)(ax^2+bx+c)}=\frac{A}{x-m}+\frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}, với\ \Delta=b^2-4ac<0$$

Dạng 3: Mẫu số có nghiệm bội:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x-a\right)^2}=\frac{A}{\left(x-a\right)^2}+\frac{B}{x-a}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\left(x-a\right)^3}=\frac{A}{\left(x-a\right)^3}+\frac{B}{\left(x-a\right)^2}+\frac{C}{x-a}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)^2}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-a)^2(x-b)^3}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{x-b}+\frac{D}{(x-b)^2}+\frac{E}{(x-b)^3}$$

- Loại 3: Một số nguyên hàm ta dùng phương pháp đổi biến hoặc từng phần

V. TÍCH PHÂN HÀM VÔ TỈ

+ Dạng 1: $f\left(x\right)=R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$ $\rightarrow$ đặt: $t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$

+ Dạng 2: $f\left(x\right)=R\left(\frac{1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}\right)$ $\rightarrow$ đặt: $t=\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}$

+ Dạng 3: $f\left(x\right)=R\left(x,\sqrt[n]{ax+b},\sqrt[m]{ax+b}\right)$ $\rightarrow$ đặt: $t=\sqrt[n.m]{ax+b}$

+ Dạng 4: $\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{a^2-x^2}dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx\end{array}\right\rangle$ *Đặt* $x=|a|\sin t,\ -\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ *hoaëc:* $x=|a|\cos t,\ 0\le t\le\pi$

+ Dạng 5: $\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{a^2+x^2}dx\\ \int\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}dx\end{array}\right\rangle$ *Đặt* $x=|a|\tan t,\ -\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$ *hoaëc:* $x=|a|\cot t,\ 0<t<\pi$

+ Dạng 6: $\left.\begin{array}{l}\int\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}dx\\ \int\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}dx\end{array}\right\rangle$ *Đặt* $x=a\cos 2t$

+ Dạng 7: $\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx$ *Đặt* $x=a+(b-a)\sin^2 t$

VI. TÍCH PHÂN HÀM LƯỢNG GIÁC

Dạng 1: Các dạng: $\begin{cases}\int\sin ax.\sin bxdx\\ \int\sin ax.\sin bxdx\\ \int\sin ax.\sin bxdx\end{cases}$

Phương pháp giải: *Dùng công thức biến đổi thành tổng:* $\begin{cases}\cos a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)+\cos(a+b)\right]\\ \sin a.\sin b=\dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]\\ \sin a.\cos b=\dfrac{1}{2}\left[\sin(a-b)+\sin(a+b)\right]\end{cases}$

Dạng 2: $\begin{cases}\int\sin^n axdx\\ \int\cos^n axdx\end{cases}$ $(n\in N)$

+ Với ***n*** **lẻ :** $\int\sin^n axdx=\int\sin^{n-1}ax.\sin axdx=\int\sin^{n-1}ax.\sin axdx$

$=\int\left(\sin^2 ax\right)^{\frac{n-1}{2}}.\sin axdx=\int\left(1-\cos^2 ax\right)^{\frac{n-1}{2}}.\sin axdx$. Đặt : $u=\cos x$

$\int\cos^n axdx$. *Phân tích như trên sau đó đặt:* $u=\sin x$

+ Với ***n*** **chẵn:** *Sử dụng công thức hạ bậc*: $\cos^2 ax=\dfrac{1+\cos 2ax}{2}$ **;** $\sin^2 ax=\dfrac{1-\cos 2ax}{2}$

Dạng 3: $\int\sin^n ax.\cos^m axdx$ (n, m $\in$ N)

+ Với ***n*** **lẻ hay** ***m*** **lẻ :** **n lẻ** Đặt u = cosax **;** **m lẻ** Đặt u = sinax

+ Với ***n*** **và** ***m*** **chẵn:** Sử dụng công thức hạ bậc:

$\cos^2 ax=\dfrac{1+\cos 2ax}{2}$ **;** $\sin^2 ax=\dfrac{1-\cos 2ax}{2}$ **;** $\sin x.\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$

Dạng 4: $\begin{cases}\int\dfrac{1}{1+\cos ax}dx\\ \int\dfrac{1}{1-\cos ax}dx\end{cases}$

Sử dụng công thức: $1+\cos ax=2\cos^2\dfrac{ax}{2}$ và $1-\cos ax=2\sin^2\dfrac{ax}{2}$

Cần nhớ: $\begin{cases} \sin a \pm \cos a = \sqrt{2}\sin\left(a \pm \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin a + \cos a = \sqrt{2}\cos\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) \\ \sin a + \cos a = -\sqrt{2}\cos\left(a - \dfrac{\pi}{4}\right) \end{cases}$

Dạng 5: $\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sin ax}dx \\ \int \dfrac{1}{\cos ax}dx \end{cases}$.

Phương pháp: $\int \dfrac{1}{\sin ax}dx = \int \dfrac{\sin ax}{\sin^2 ax}dx = \int \dfrac{\sin ax}{1-\cos^2 ax}dx$. Đặt $u = \cos x$

$\int \dfrac{1}{\cos ax}dx = \int \dfrac{\cos ax}{\cos^2 ax}dx = \int \dfrac{\cos ax}{1-\sin^2 ax}dx$. Đặt $u = \sin x$

Dạng 6: $\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sin^n ax}dx \\ \int \dfrac{1}{\cos^n ax}dx \end{cases} \quad (n \in N)$

Phương pháp:

$\int \dfrac{1}{\sin^n ax}dx = \int \dfrac{1}{\left(\sin^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}}.\dfrac{1}{\sin^2 ax}dx = \int \left(1+\tan^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}.\dfrac{1}{\sin^2 ax}dx$; Đặt $u = \tan ax$.

$\int \dfrac{1}{\cos^n ax}dx = \int \dfrac{1}{\left(\cos^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}}.\dfrac{1}{\cos^2 ax}dx = \int \left(1+\cot^2 ax\right)^{\frac{n-2}{2}}.\dfrac{1}{\cos^2 ax}dx$; Đặt $u = \cot ax$

Dạng 7: $\begin{cases} \int \tan^n ax dx \\ \int \cot^n ax dx \end{cases} \quad (n \in N)$

Phương pháp: + Biến đổi sao cho $\tan^2 ax$ làm thừa số chung

+ Thay : $\tan^2 ax = \dfrac{1}{\cos^2 ax} - 1$

Dạng 8: $\begin{cases} \int \dfrac{\tan^n ax}{\cos^2 ax}dx \\ \int \dfrac{\cot^n ax}{\sin^2 ax}dx \end{cases} \quad (n \in N)$. **Phương pháp:** đặt $u = \tan ax$ hoặc $u = \cot ax$

Dạng 9: $\int \dfrac{dx}{a.\sin x + b.\cos x + c}$

Cách 1: Phương pháp chung:

Đặt : $t=\tan\dfrac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2};\quad \cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\quad \tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}\end{cases}$

Cách 2: Phương pháp riêng: Nếu $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Ta có: $\dfrac{1}{a\sin x+b\cos x+c}=\dfrac{1}{c\left[1+\cos\left(x-\alpha\right)\right]}=\dfrac{1}{2c}.\dfrac{1}{\cos^2\dfrac{x-\alpha}{2}}$.

Trong đó : $\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Khi đó : $I=\dfrac{1}{2c}\int\dfrac{dx}{\cos^2\dfrac{x-\alpha}{2}}=\dfrac{1}{c}\tan\left(\dfrac{x-\alpha}{2}\right)+C$

Dạng 10: $\int\dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x}dx$

Phương pháp: Phân tích $\dfrac{a.\sin x+b.\cos x}{c.\sin x+d.\cos x}=A+\dfrac{B(c.\cos x-d.\sin x)}{c.\sin x+d.\cos x}$

Sau đó dùng đồng nhất thức tìm *A, B.*

Dạng 11: $\int\dfrac{a.\sin x+b.\cos x+m}{c.\sin x+d.\cos x+n}dx$

Phương pháp:

Phân tích $\dfrac{a.\sin x+b.\cos x+m}{c.\sin x+d.\cos x+n}=A+\dfrac{B(c.\cos x-d.\sin x)}{c.\sin x+d.\cos x+n}+\dfrac{C}{c.\sin x+d.\cos x+n}$

Sau đó dùng đồng nhất thức tìm *A, B, C.*

Dạng 12: $\int\dfrac{dx}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}$

Ta thực hiện theo các bước sau :

+ Bước 1: Sử dụng đồng nhất thức : $1=\dfrac{\sin\left(a-b\right)}{\sin\left(a-b\right)}=\dfrac{\sin\left[\left(x+a\right)-\left(x+b\right)\right]}{\left(a-b\right)}$

+ Bước 2: Ta được :

$$\int\frac{dx}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}=\frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\int\frac{\sin\left[\left(x-a\right)-\left(x-b\right)\right]}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\int\frac{\sin\left(x+a\right)\cos\left(x-b\right)-\sin\left(x-b\right)\cos\left(x-a\right)}{\sin\left(x+a\right)\sin\left(x+b\right)}dx$$

$$=\frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\left[\int\frac{\cos\left(x+b\right)}{\sin\left(x+b\right)}dx-\frac{\cos\left(x+a\right)}{\sin\left(x+a\right)}dx\right]$$

$$=\frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\left[\ln\left|\sin\left(x+b\right)\right|-\ln\left|\sin\left(x+a\right)\right|\right]=\frac{1}{\sin\left(a-b\right)}\ln\left|\frac{\sin\left(x+b\right)}{\sin\left(x+a\right)}\right|+C$$

**** Chú ý: phương pháp trên cũng được áp dụng cho các dạng tích phân sau :***

$\int \frac{dx}{\cos(x+a)\cos(x+b)}$ sử dụng đồng nhất thức : $1 = \frac{\sin(a-b)}{\sin(a-b)}$

$\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$ sử dụng đồng nhất thức : $1 = \frac{\cos(a-b)}{\cos(a-b)}$.

Dạng 13: $\int \frac{dx}{\sin x + \sin\alpha}$

* Dùng công thức tổng thành tích biến đổi về dạng 12 rồi giải bình thường.

* Chú ý : Phương pháp trên cũng áp dụng cho các dạng tích phân sau :

$\int \frac{dx}{\cos x + \cos\alpha}$; $\int \frac{dx}{\cos x + m}$ $\int \frac{dx}{\sin x + m}$; $|m| \le 1$.

Dạng 14: $\int \frac{a_1\sin^2 x + b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x}{a_2\sin x + b_2\cos x}dx$.

\+ Biến đổi :

$$a_1\sin^2 x + b_1\sin x\cos x + c_1\cos^2 x = (A\sin x + B\cos x)(a_2\sin x + b_2\cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

\+ Khi đó: $\int \frac{(A\sin x + B\cos x)(a_2\sin x + b_2\cos x) + C(\sin^2 x + \cos^2 x)}{a_2\sin x + b_2\cos x}$

$$= \int (A\sin x + B\cos x) + C\int \frac{dx}{a_2\sin x + b_2\cos x}$$

$$= -A\cos x + B\sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\int \frac{dx}{\sin(x+\alpha)} = -A\cos x + B\sin x + \frac{C}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\alpha}{2}\right| + C$$

Trong đó : $\sin\alpha = \frac{b_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$; $\cos\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$.

Dạng 15: $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x}$

\+ Biến đổi về dạng : $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(a\tan^2 x + b\tan x + c)\cot^2 x}$

\+ Đặt: $t = \tan x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x}dx = (1 + \tan^2 x)dx = (1 + t^2)dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

\+ Khi đó $\int \frac{dx}{a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x} = \int \frac{dt}{at^2 + bt + c}$.

Dạng 16: $\mathrm{A}_{1.1} = \int (\sin x)^n dx$; $\mathrm{A}_{1.2}\int (\cos x)^n dx$

1. Công thức hạ bậc

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; $\sin^3 x = \frac{-\sin 3x + 3\sin x}{4}$; $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$

2. Phương pháp

2.1. Nếu n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc

2.2. Nếu n = 3 thì sử dụng công thức hạ bậc hoặc biến đổi theo 2.3.

2.3. Nếu 3 ≤ n lẻ (n = 2p +1) thì thực hiện biến đổi:

$$A_{1.1} = \int (\sin x)^n dx = \int (\sin x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int \left(1-\cos^2 x\right)^p d(\cos x)$$

$$= -\int \left[C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + ... + (-1)^k C_p^k \left(\cos^2 x\right)^k + ... + (-1)^p C_p^p \left(\cos^2 x\right)^p \right] d(\cos x)$$

$$= -\left[C_p^0 \cos x - \frac{1}{3} C_p^1 \cos^3 x + ... + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\cos x)^{2k+1} + ... + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\cos x)^{2p+1} \right] + c$$

$$A_{1.2} = \int (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int \left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$$

$$= \int \left[C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + ... + (-1)^k C_p^k \left(\sin^2 x\right)^k + ... + (-1)^p C_p^p \left(\sin^2 x\right)^p \right] d(\sin x)$$

$$= \left[C_p^0 \sin x - \frac{1}{3} C_p^1 \sin^3 x + ... + \frac{(-1)^k}{2k+1} C_p^k (\sin x)^{2k+1} + ... + \frac{(-1)^p}{2p+1} C_p^p (\sin x)^{2p+1} \right] + c$$

Dạng 17: $B = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$ (m, n∈N)

1. Phương pháp:

1.1. Trường hợp 1: m, n là các số nguyên

a. Nếu m chẵn, n chẵn thì sử dụng công thức hạ bậc, biến đổi tích thành tổng.

b. Nếu m chẵn, n lẻ (n =2p +1) thì biến đổi:

$$B = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p+1} dx = \int (\sin x)^m (\cos x)^{2p} \cos x dx = \int (\sin x)^m \left(1-\sin^2 x\right)^p d(\sin x)$$

$$= \int (\sin x)^m \left[C_p^0 - C_p^1 \sin^2 x + ... + (-1)^k C_p^k \left(\sin^2 x\right)^k + ... + (-1)^p C_p^p \left(\sin^2 x\right)^p \right] d(\sin x) =$$

$$\left[C_p^0 \frac{(\sin x)^{m+1}}{m+1} - C_p^1 \frac{(\sin x)^{m+3}}{m+3} + ... + (-1)^k C_p^k \frac{(\sin x)^{2k+1+m}}{2k+1+m} + ... + (-1)^p C_p^p \frac{(\sin x)^{2p+1+m}}{2p+1+m} \right] + c$$

c. Nếu m chẵn, n lẻ (n =2p +1) thì biến đổi:

$$B = \int (\sin x)^{2p+1} (\cos x)^n dx = \int (\cos x)^n (\sin x)^{2p} \sin x dx = -\int (\cos x)^n \left(1-\cos^2 x\right)^p d(\cos x)$$

$$= -\int (\cos x)^n \left[C_p^0 - C_p^1 \cos^2 x + ... + (-1)^k C_p^k \left(\cos^2 x\right)^k + ... + (-1)^p C_p^p \left(\cos^2 x\right)^p \right] d(\cos x) =$$

$$-\left[C_p^0 \frac{(\cos x)^{n+1}}{n+1} - C_p^1 \frac{(\cos x)^{n+3}}{n+3} + ... + (-1)^k C_p^k \frac{(\cos x)^{2k+1+n}}{2k+1+n} + ... + (-1)^p C_p^p \frac{(\cos x)^{2p+1+n}}{2p+1+n} \right] + c$$

d. Nếu m lẻ, n lẻ thì sử dụng biến đổi 1.2. hoặc 1.3. cho số mũ lẻ bé hơn.

1.2. Nếu m, n là các số hữu tỉ thì biến đổi và đặt u = sinx ta có:

$$B = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int (\sin x)^m \left(\cos^2 x\right)^{\frac{n-1}{2}} \cos x dx = \int u^m \left(1-u^2\right)^{\frac{m-1}{2}} du \quad (*)$$

• Tích phân (*) tính được ⇔ 1 trong 3 số $\frac{m+1}{2}; \frac{n-1}{2}; \frac{m+k}{2}$ là số nguyên

Dạng 18: $C_{3.1} = \int (\text{tg}\, x)^n dx \,;\, C_{3.2} = \int (\text{cotg}\, x)^n dx$ (n∈N)

1. Công thức sử dụng

- $\int\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int d\left(\operatorname{tg} x\right)=\operatorname{tg} x+c$
- $\int\left(1+\operatorname{cotg}^2 x\right)dx=-\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\int d\left(\operatorname{cotg} x\right)=-\operatorname{cotg} x+c$
- $\int\operatorname{tg} xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d\left(\cos x\right)}{\cos x}=-\ln\left|\cos x\right|+c$
- $\int\operatorname{cotg} xdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{d\left(\sin x\right)}{\sin x}=\ln\left|\sin x\right|+c$

Dạng 19: $\mathrm{D}_{4.1}=\int\frac{(\mathrm{tg\,x})^{\mathrm{m}}}{(\cos\mathrm{x})^{\mathrm{n}}}\mathrm{dx}$; $\mathrm{D}_{4.2}=\int\frac{(\mathrm{cotg\,x})^{\mathrm{m}}}{(\sin\mathrm{x})^{\mathrm{n}}}\mathrm{dx}$

1. Phương pháp: Xét đại diện $D_{4.1}=\int\frac{(\operatorname{tg} x)^m}{(\cos x)^n}dx$

1.1. Nếu n chẵn (n = 2k) thì biến đổi:

$$\mathrm{D}_{4.1}=\int\frac{(\mathrm{tgx})^{\mathrm{m}}}{(\mathrm{cosx})^{2\mathrm{k}}}\mathrm{dx}=\int(\operatorname{tg} x)^m\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int(\operatorname{tg} x)^m\left(1+\operatorname{tg}^2 x\right)^{k-1}d\left(\operatorname{tg} x\right)$$

$$=\int(\operatorname{tg} x)^m\left[C_{k-1}^0+C_{k-1}^1\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^1+\ldots+C_{k-1}^p\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^p+\ldots+C_{k-1}^{k-1}\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^{k-1}\right]d\left(\operatorname{tg} x\right)$$

$$=C_{k-1}^0\frac{(\operatorname{tg} x)^{m+1}}{m+1}+C_{k-1}^1\frac{(\operatorname{tg} x)^{m+3}}{m+3}+\ldots+C_{k-1}^p\frac{(\operatorname{tg} x)^{m+2p+1}}{m+2p+1}+\ldots+C_{k-1}^{k-1}\frac{(\operatorname{tg} x)^{m+2k-1}}{m+2k-1}+c$$

1.2. Nếu m lẻ, n lẻ (m = 2k +1, n = 2h +1) thì biến đổi:

$$\mathrm{D}_{4.1}=\int\frac{(\mathrm{tgx})^{2\mathrm{k}+1}}{(\mathrm{cosx})^{2\mathrm{h}+1}}\mathrm{dx}=\int(\operatorname{tg} x)^{2k}\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}\frac{\operatorname{tg} x}{\cos x}dx=\int\left(\operatorname{tg}^2 x\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{2h}d\left(\frac{1}{\cos x}\right)=\int\left(u^2-1\right)^k u^{2h}du$$ (ở đây $u=\frac{1}{\cos x}$)

$$=\int u^{2h}\left[C_k^0\left(u^2\right)^k-C_k^1\left(u^2\right)^{k-1}+\ldots+(-1)^p C_k^p\left(u^2\right)^{k-p}+\ldots+(-1)^k C_k^k\right]du$$

$$=C_k^0\frac{u^{2k+2h+1}}{2k+2h+1}-C_k^1\frac{u^{2k+2h-1}}{2k+2h-1}+\ldots+(-1)^p C_k^p\frac{u^{2k+2h-2p+1}}{2k+2h-2p+1}+\ldots+(-1)^k C_k^k\frac{u^{2h+1}}{2h+1}+c$$

1.3. Nếu m chẵn, n lẻ (m = 2k, n = 2h + 1) thì sử dụng biến đổi:

$$D_{4.1}=\int\frac{(\operatorname{tg} x)^{2k}}{(\cos x)^{2h+1}}dx=\int\frac{(\sin x)^{2k}\cos x}{(\cos x)^{2(k+h+1)}}dx=\int\frac{(\sin x)^{2k}}{\left(1-\sin^2 x\right)^{k+h+1}}d\left(\sin x\right);\left(u=\sin x\right)$$

$$D_{4.1}=\int\frac{u^{2k}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}=\int\frac{u^{2k-2}\left[1-\left(1-u^2\right)\right]}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}du=\int\frac{u^{2k-2}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h+1}}-\int\frac{u^{2k-2}du}{\left(1-u^2\right)^{k+h}}$$

Hệ thức trên là hệ thức truy hồi, kết hợp với bài tích phân hàm phân thức hữu tỉ ta có thể tính được $D_{4.1}$.

Dạng 20: Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

1. Phương pháp:

$$E_{5.1} = \int(\cos mx)(\cos nx)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right]dx$$
$$E_{5.2} = \int(\sin mx)(\sin nx)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right]dx$$
$$E_{5.3} = \int(\sin mx)(\cos nx)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right]dx$$
$$E_{5.4} = \int(\cos mx)(\sin nx)\,dx = \frac{1}{2}\int\left[\sin(m+n)x - \sin(m-n)x\right]dx$$

VI. TÍCH PHÂN HÀM CÓ CHỨA TRỊ TUYỆT ĐỐI

Dạng 1: Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b |f(x)|\,dx$, ta thực hiện các bước sau:

+ Bước 1. Lập bảng xét dấu (BXD) của hàm số f(x) trên đoạn [a; b], giả sử f(x) có BXD:

x	a		x_1		x_2		b
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

+ Bước 2. Tính $I = \int_a^b |f(x)|\,dx = \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{b} f(x)dx$.

Dạng 2: Giả sử cần tính tích phân $I = \int_a^b \left[|f(x)| \pm |g(x)|\right]dx$, ta thực hiện:

Cách 1. Tách $I = \int_a^b \left[|f(x)| \pm |g(x)|\right]dx = \int_a^b |f(x)|\,dx \pm \int_a^b |g(x)|\,dx$ rồi sử dụng dạng 1 ở trên.

Cách 2.

Bước 1. Lập bảng xét dấu chung của hàm số f(x) và g(x) trên đoạn [a; b].

Bước 2. Dựa vào bảng xét dấu ta bỏ giá trị tuyệt đối của f(x) và g(x).

Dạng 3: Để tính các tích phân $I = \int_a^b \max\left\{f(x),\ g(x)\right\}dx$ và $J = \int_a^b \min\left\{f(x),\ g(x)\right\}dx$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập bảng xét dấu hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn [a; b].

Bước 2.

+ Nếu $h(x) > 0$ thì $\max\left\{f(x),\ g(x)\right\} = f(x)$ và $\min\left\{f(x),\ g(x)\right\} = g(x)$.

+ Nếu $h(x) < 0$ thì $\max\left\{f(x),\ g(x)\right\} = g(x)$ và $\min\left\{f(x),\ g(x)\right\} = f(x)$.

VII. TÍCH PHÂN MỘT SỐ HÀM ĐẶC BIỆT

1. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và lẻ trên đoạn $\left[-a;\ a\right]$. Khi đó: $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

2. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $\left[-a;\ a\right]$. Khi đó $I = \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

3. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và chẵn trên đoạn $\left[-\alpha : \alpha\right]$. Khi đó: $\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} \frac{f(x)}{a^x + 1}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$

4. Cho f(x) liên tục trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .Khi đó: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$.

5. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ Khi đó: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(\mathrm{a}+\mathrm{b}-x)dx$

6. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$ thoả mãn: $f(x) = f(a+b-x)$ thì $\int\limits_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2}\int\limits_a^b f(x)dx$

Nhận xét : Bằng cách làm tương tự ta có các công thức

**Nếu f(x) liên tục trên* $\left[0;1\right]$ *thì* $\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int\limits_{\alpha}^{\pi-\alpha} f(\sin x)dx$

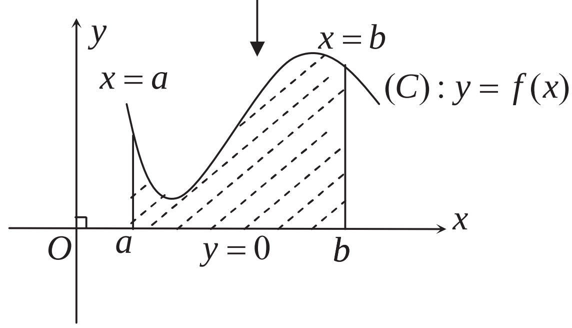
**Nếu f(x) liên tục trên* $\left[0;1\right]$ *thì* $\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} xf(\cos x)dx = \pi\int\limits_{\alpha}^{2\pi-\alpha} f(\cos x)dx$

VIII. ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình phẳng

Dạng 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f\left(x\right)$, trục Ox ($y = 0$) và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ là:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx}$$



Phương pháp giải:

Bước 1. *Lập bảng xét dấu hàm số* $y = f(x)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

Bước 2. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân :* $\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$.

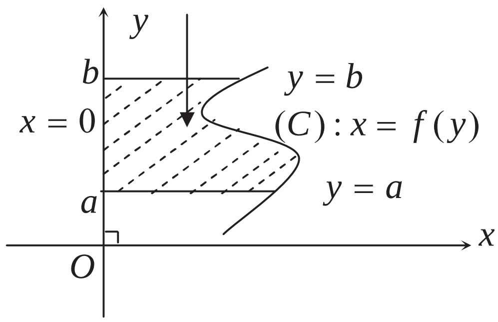
<u>Chú ý:</u> có 2 cách tính tích phân $\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx$

+ Cách 1: Nếu trên đoạn $\left[a;b\right]$ hàm số $f\left(x\right)$ không đổi dấu thì: $\int\limits_a^b \left|f(x)\right|dx = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|$

+ Cách 2: Lập bảng xét dấu hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[a;b\right]$ rồi khử trị tuyệt đối.

Dạng 2: Cho hàm số $x = f\left(y\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = f\left(y\right)$, trục Oy ($x = 0$) và hai đường thẳng $y = a$ và $y = b$ là:

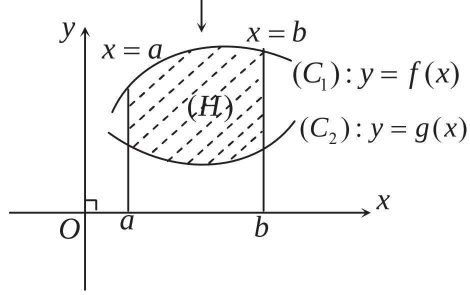
$$\boxed{S = \int\limits_a^b \left|f(y)\right|dy}$$



2. Diện tích hình phẳng

Dạng 1: Cho 2 hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ là:

$$\boxed{S = \int\limits_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx}$$



Phương pháp giải:

Bước 1. *Lập bảng xét dấu hàm số* $f\left(x\right) - g\left(x\right)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

Bước 2. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân* $\int\limits_a^b \left|f(x) - g(x)\right|dx$.

Dạng 2: Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ là: $\boxed{S = \int\limits_\alpha^\beta \left|f(x) - g(x)\right|dx}$.

Trong đó α,β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ $\left(a\le\alpha<\beta\le b\right)$

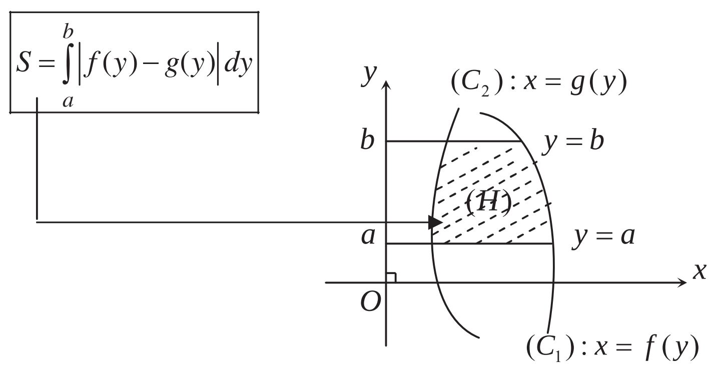
Phương pháp giải:

Bước 1. *Giải phương trình* $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$*. Giả sử ta tìm được* α,β *là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình* $\left(a\le\alpha<\beta\le b\right)$.

Bước 2. *Lập bảng xét dấu hàm số :* $f\left(x\right)-g\left(x\right)$ *trên đoạn* $\left[\alpha;\beta\right]$.

Bước 3. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân:* $\int\limits_\alpha^\beta\left|f(x)-g(x)\right|dx$.

Dạng 3: Cho hai hàm số $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hai hàm số $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ và hai đường thẳng $y=a$ và $y=b$ là:



Phương pháp giải:

Bước 1. *Lập bảng xét dấu hàm số* $f\left(y\right)-g\left(y\right)$ *trên đoạn* $\left[a;b\right]$.

Bước 2. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân* $\int\limits_a^b\left|f(y)-g(y)\right|dy$.

Dạng 4: Cho hai hàm số $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $x=f\left(y\right)$ và $x=g\left(y\right)$ là: $\boxed{S=\int\limits_\alpha^\beta\left|g_1(y)-g_2(y)\right|dy}$.

Trong đó α,β là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình $f\left(y\right)=g\left(y\right)$ $\left(a\le\alpha<\beta\le b\right)$

Phương pháp giải:

Bước 1. *Giải phương trình* $f\left(y\right)-g\left(y\right)=0$*. Giả sử ta tìm được* α,β *là nghiệm nhỏ nhất và lớn nhất của phương trình* $\left(a\le\alpha<\beta\le b\right)$.

Bước 2. *Lập bảng xét dấu hàm số :* $f\left(y\right)-g\left(y\right)$ *trên đoạn* $\left[\alpha;\beta\right]$.

Bước 3. *Dựa vào bảng xét dấu tính tích phân:* $\int\limits_\alpha^\beta\left|f(y)-g(y)\right|dy$.

Dạng 5: khi tính diện tích giới hạn 3 hàm số trở lên thì phương pháp chung là vẽ đồ thị rồi dựa vào đồ thị để tính.

Cách tính giới hạn của 3 hàm số: Cho 3 hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ và $y=h\left(x\right)$ liên tục trên $\left[a;b\right]$. Khi đó diện tích của hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị 3 hàm số $y=f\left(x\right)$, $y=g\left(x\right)$ và $y=h\left(x\right)$ là:

$$\boxed{S=\int_{x_1}^{x_2}\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx+\int_{x_2}^{x_3}\left|h\left(x\right)-g\left(x\right)\right|dx}$$

Với: + x_1 là nghiệm phương trình: $f\left(x\right)=g\left(x\right)$

+ x_2 là nghiệm phương trình: $f\left(x\right)=h\left(x\right)$

+ x_3 là nghiệm phương trình: $h\left(x\right)=g\left(x\right)$

Trong đó: $a<x_1<x_2<x_3<b$

Tóm lại khi giải toán ta thường gặp các dạng sau:

1. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a;x=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx$

2. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a;x=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx$

3. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} x=f(y) \\ x=g(y) \\ y=a;y=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b\left|f(y)-g(y)\right|dy$

Chú ý:

1. Để tính diện tích S ta phải tính tích phân (1) , muốn vậy ta phải "phá" dấu giá trị tuyệt đối .

- Nếu $f(x)\ge 0$, $\forall x\in\left[a\,;b\right]$ thì $S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^b f(x)dx$
- Nếu $f(x)\le 0$, $\forall x\in\left[a\,;b\right]$ thì $S=\int_a^b\left|f(x)\right|dx=\int_a^b\left(-f(x)\right)dx$

Muốn "phá" dấu giá trị tuyệt đối ta phải xét dấu của biểu thức *f(x)* . Thường có hai cách làm như sau :

-*Cách 1:* Dùng định lí "dấu của nhị thức bật nhất" , định lí "dấu của tam thức bậc hai" để xét dấu các biểu thức f(x) ; đôi khi phải giải các bất phương trình *f(x) ≥ 0* , *f(x) ≤ 0* trên đoạn $\left[a\,;\,b\right]$

-*Cách 2: Dựa vào đồ thị của hàm số y =f(x) trên đoạn* $\left[a\,;\,b\right]$ để suy ra dấu của *f(x)* trên đoạn đó .

- Nếu trên đoạn [a ; b] đồ thị hàm số y = f(x) nằm phía "trên" trục hoành thì $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a\,;b]$
- Nếu trên đoạn [a ; b] đồ thị hàm số y = f(x) nằm phía "dưới" trục hoành thì $f(x) \leq 0$, $\forall x \in [a\,;b]$

-*Cách 3* Nếu f(x) không đổi dấu trên [a ; b] thì ta có : $S = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$

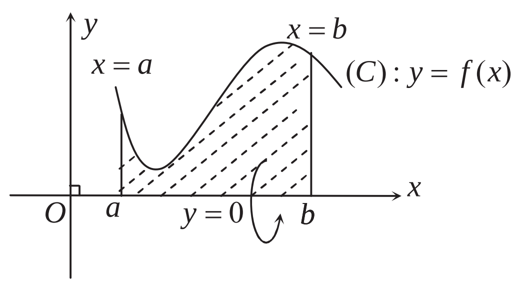
2. Nếu phương trình f(x) = 0 có k nghiệm phân biệt x_1 , x_2 , …, x_k thuộc (a ; b) thì trên mỗi khoảng (a ; x_1) , (x_1 ; x_2) , …, (x_k ; b) biểu thức f(x) có dấu không đổi .

Khi đó để tính tích phân $S = \int_a^b |f(x)|dx$ ta có thể tính như sau :

$$S = \int_a^b |f(x)|dx = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_k}^{b} f(x)dx\right|$$

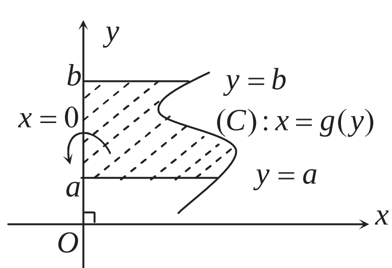
2. Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng quay quanh trục Ox, Oy

Dạng 1: Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = f\left(x\right)$, trục Ox và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b\left(a < b\right)$quay xung quanh trục Ox là: $\boxed{V_{\text{Ox}} = \pi\int_a^b \left[f\left(x\right)\right]^2 dx}$.



Chú ý: Hàm số $y = f\left(x\right) \geq 0 \quad \forall x \in \left[a;b\right]$ và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Dạng 2: Thể tích của vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $x = f\left(y\right)$, trục Oy và hai đường thẳng $y = a$ và $y = b \ \left(a < b\right)$quay xung quanh trục Oy là: $\boxed{V_{\text{Oy}} = \pi\int_a^b \left[f\left(y\right)\right]^2 dy}$.



Chú ý: Hàm số $x = f\left(y\right) \ge 0 \quad \forall y \in \left[a;b\right]$ và liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$.

Dạng 3: Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ liên tục, cùng dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số trên và hai đường thẳng $x = a$ và $x = b$ $\left(a < b\right)$ quay xung quanh trục Ox tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là: $\boxed{\mathrm{V}_{Ox} = \pi\int\limits_a^b \left|\left[f\left(x\right)\right]^2 - \left[g\left(x\right)\right]^2\right| dx}$

Dạng 4: Cho hai hàm số $x = f\left(y\right)$ và $x = g\left(y\right)$ liên tục, cùng dấu trên đoạn $\left[a;b\right]$. Hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số trên và hai đường thẳng $y = a$ và $y = b$ $\left(a < b\right)$ quay xung quanh trục Ox tạo nên một khối tròn xoay có thể tích là: $\boxed{\mathrm{V}_{Oy} = \pi\int\limits_a^b \left|\left[f\left(y\right)\right]^2 - \left[g\left(y\right)\right]^2\right| dx}$

Tóm lại khi giải toán ta thường gặp các dạng sau:

1. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \\ x = a; x = b \end{cases}$ *quanh Ox*

một vòng là : $V_{\mathrm{Ox}} = \pi\int\limits_a^b f^2\left(x\right).dx$.

2. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases}$ *quanh Ox*

một vòng là : $V_{\mathrm{Ox}} = \pi\int\limits_a^b \left|f^2\left(x\right) - g^2\left(x\right)\right|.dx$.

3. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} x = f(y) \\ x = 0 \\ y = a; y = b \end{cases}$ *quanh Oy*

một vòng là : $V_{Oy} = \pi\int\limits_a^b f^2\left(y\right).dy$.

4. *Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:* $\begin{cases} x = f(y) \\ x = g(y) \\ y = a; y = b \end{cases}$ *quanh Oy*

một vòng là : $V_{Oy} = \pi\int\limits_a^b \left|f^2\left(y\right) - g^2\left(y\right)\right|.dy$.

D. SỐ PHỨC

1. Các định nghĩa, công thức, tính chất số phức:

1.1. Định nghĩa số phức

Mỗi biểu thức dạng $a+bi$, trong đó $a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1$ được gọi là một **số phức**

Đối với số phức $z=a+bi$, ta nói a là **phần thực**, b là **phần ảo** của z.

Tập hợp các số phức kí hiệu là $\mathbb{C}$.

<u>Chú ý:</u>

- Mỗi số thực a được coi là một số phức với phần ảo bằng 0: $a=a+0i$
- Như vậy ta có $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.
- Số phức bi với $b\in\mathbb{R}$ được gọi là **số thuần ảo** (hoặc **số ảo)**
- Số 0 được gọi là số vừa thực vừa ảo; số i được gọi là **đơn vị ảo**.

1.2. Số phức bằng nhau

Hai số phức là bằng nhau nếu phần thực và phần ảo tương ứng của chúng bằng nhau:

$$a+bi=c+di\Leftrightarrow\begin{cases}a=c\\b=d\end{cases}$$

1.3. Số phức đối và số phức liên hợp

Cho số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1$

- Số phức đối của z kí hiệu là $-z$ và $-z=-a-bi$.
- Số phức liên hợp của z kí hiệu là $\bar{z}$ và $\bar{z}=a-bi$.

1.4. Biểu diễn hình học của số phức

Điểm $M(a;b)$ trong một hệ trục tọa độ vuông góc của mặt phẳng được gọi là **điểm biểu diễn số phức** $z=a+bi$**.**

1.5. Môđun của số phức

Giả sử số phức $z=a+bi$ được biểu diễn bởi $M(a;b)$ trên mặt phẳng tọa độ. Độ dài của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là **môđun của số phức** z và kí hiệu là $|z|$.

Vậy: $|z|=|\overrightarrow{OM}|$ hay $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.

<u>Nhận xét:</u> $|z|=|-z|=|\bar{z}|$.

2. Cộng, trừ, nhân, chia hai số phức

2.1. Phép cộng và phép trừ

Phép cộng và phép trừ hai số phức được thực hiện theo quy tắc cộng, trừ hai đa thức.

Tổng quát:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

2.2. Phép nhân

Phép nhân hai số phức được thực hiện theo quy tắc nhân đa thức rồi thay $i^2=-1$ trong kết quả nhận được.

Tổng quát: $(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$

<u>Chú ý:</u>

- Phép cộng và phép nhân các số phức có đầy đủ các tính chất của phép cộng và phép nhân các số thực.
- Cho số phức $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1$. Ta có: $z+\bar{z}=2a$; $z.\bar{z}=|z|^2$.

2.3. Phép chia hai số phức

Với $a+bi\neq 0$, để tính thương $\frac{c+di}{a+bi}$, ta nhân cả tử và mẫu với số phức liên hợp của $a+bi$

Cụ thể: $\frac{c+di}{a+bi}=\frac{(c+di)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+\frac{ad-bc}{a^2+b^2}i$.

2.4. Các tính chất cần nhớ

Cho số phức $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R}, i^2=-1$

- ***Tính chất 1***: Số phức z là số thực $\Leftrightarrow z=\overline{z}$
- ***Tính chất 2***: Số phức z là số ảo $\Leftrightarrow z=-\overline{z}$
- Cho hai số phức $z_1=a_1+b_1i;\ z_2=a_2+b_2i;\ a_1,b_1,a_2,b_2\in\mathbb{R}$ ta có:
- ***Tính chất 3:*** $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
- ***Tính chất 4:*** $\overline{z_1.z_2}=\overline{z_1}.\overline{z_2}$
- ***Tính chất 5:*** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\ z_2\neq 0$
- ***Tính chất 6:*** $|z_1.z_2|=|z_1|.|z_2|$
- ***Tính chất 7:*** $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\ z_2\neq 0$
- ***Tính chất 8:*** $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$

3. Căn bậc hai của một số phức

Phương pháp: Cho số phức w = *a + bi* . Tìm căn bậc hai của số phức này.

+) Nếu w = 0 $\Rightarrow$ w có một căn bậc hai là 0

+) Nếu w = a > 0 (a $\in$ R) $\Rightarrow$ w có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và - $\sqrt{a}$

+) Nếu w = a < 0 (a $\in$ R) $\Rightarrow$ w có hai căn bậc hai là $i\sqrt{-a}$ và $i\sqrt{-a}$

+) Nếu w = *a + bi* (b $\neq$ 0)

Giả sử z = x +yi (x, y thuộc R) là một căn bậc hai của w $\Leftrightarrow$ z^2 = w $\Leftrightarrow$ $(x+yi)^2$ = *a + bi* $\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}$

Để tìm căn bậc hai của w ta cần giải hệ này để tìm x, y. Mỗi cặp (x, y) nghiệm đúng phương trình đó cho ta một căn bậc hai của w.

Chú ý: Có rất nhiều cách để giải hệ này, sau đây là hai cách thường dùng để giải.

<u>Cách 1:</u> Sử dụng phương pháp thế: Rút x theo y từ phương trình (2) thế vào pt (1) rồi biến đổi thành phương trình trùng phương để giải.

<u>Cách 2:</u> Ta biến đổi hệ như sau:

$$\begin{cases}x^2-y^2=a\\2xy=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2-y^2\right)^2=a^2\\(2xy)^2=b^2\\2xy=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=a\\x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2}\\xy=b/2\end{cases}$$

Từ hệ này, ta có thể giải ra x^2 và y^2 một cách dễ dàng, sau đó kết hợp với điều kiện xy=b/2 để xem xét x, y cùng dấu

hay trái dấu từ đó chọn được nghiệm thích hợp.

Nhận xét: Mỗi số phức khác 0 có hai căn bậc hai là hai số đối nhau.

4. Phương trình bậc hai với hệ số thực

4.1.Công thức nghiệm của phương trình bậc hai

Xét phương trình bậc hai: $Az^2 + Bz + C = 0$ (*A, B, C* là các số thực, $A \neq 0$) có $\Delta = B^2 - 4AC$

- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm thực phân biệt $z = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A}$
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép thực $z = \frac{-B}{2A}$
- Nếu $\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = i^2(-\Delta)$ thì *phương* trình có 2 nghiệm phức phân biệt $z = \frac{-B \pm i\sqrt{-\Delta}}{2A}$

❖ Chú ý : Khi A, B, C là các số phức

- $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép thực $z = \frac{-B}{2A}$
- $\Delta \neq 0$ thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $z_1 = \frac{-B+\delta}{2A}$, $z_2 = \frac{-B-\delta}{2A}$

(trong đó δ là một căn bậc hai của Δ).

4.2. Chú ý

- Phương trình bậc hai trên tập hợp số phức với hệ số thực luôn có 2 nghiệm là 2 số phức liên hợp.
- Khi b là số chẵn ta có thể tính Δ' và công thức nghiệm tương tự như trong tập hợp số thực.
- Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $az^2 + bz + c = 0$ $(a \neq 0)$ a, b, c là các số thực hoăc số phức. Khi đó ta có: $\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \\ z_1 . z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Dạng 1. Thực hiện các phép tính trên tập hợp số phức. xác định phần thực, phần áo và tính môđun của một số phức

Phương pháp

- *Sử dụng các qui tắc cộng, trừ, nhân, chia số phức để tính toán giá trị các biểu thức.*
- *Để xác định phần thực, phần ảo và môđun của số phức* z *thì ta phải sử dụng các khái niệm liên quan đến số phức và các phép toán trên tập hợp số phức để biến đổi số phức* $z = a + bi (a; b \in \mathbb{R})$. *Khi đó:* z *có phần thực bằng* a; *phần ảo bằng* b; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- *Trong khi tính toán về số phức ta có thể sử dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ như trong số thực.*

2. Tìm số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

- *Nếu trong điều kiện đề bài chỉ có duy nhất một kí hiệu z hoặc* $\bar{z}$ *thì ta quy về bài toán thực hiện phép tính.*
- *Nếu trong điều kiện đề bài có nhiều hơn một kí hiệu z hoặc* $\bar{z}$ *hoặc có kí hiệu môđun ta giải theo phương pháp sau:*
  - *Gọi* $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.

- *Sử dụng giả thiết bài toán và khái niệm về số lập hệ hai phương trình với hai ẩn a,b*
- *Giải hệ phương trình lập được trên tập hợp số thực và kết luận.*

3. Giải phương trình trên tập hợp số phức

Phương pháp giải phương trình $az^2 + bz + c = 0 \ (a \neq 0)$

- *Tính* $\Delta = b^2 - 4ac$
- *Dựa vào giá trị của* Δ *để xác định công thức nghiệm .*

4. Biểu diễn hình học số phức. tìm tập hợp điểm biểu diễn số phức thỏa mãn điều kiện cho trước

Phương pháp

- *Gọi* $z = x + yi \ (x, y \in R) \Rightarrow M(x; y)$ *biểu diễn cho số phức* z *trong mặt phẳng toạ độ.*
- *Dựa vào dữ kiện bài toán, thiết lập mối liên hệ giữa* x *và* y
- *Dựa vào mối liên hệ đó, để kết luận tập hợp điểm trong mặt phẳng biểu diễn cho số phức* z.

5. Tìm số phức có hình biểu diễn cho trước

Phương pháp

- *Tìm toạ độ điểm M (phụ thuộc tham số) biểu diễn cho số phức* z *trên mặt phẳng toạ độ.*
- *Cho M thuộc và hình biểu diễn của* z, *ta tìm được giá trị của tham số.*
- *Kết luận số phức* z *cần tìm.*

Chú ý:

-Phương trình đường tròn: $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 = R^2$ hoặc $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ (trong đó $a^2 + b^2 - c > 0$). Phương trình hình tròn: $\left(x-a\right)^2 + \left(y-b\right)^2 \leq R^2$

- Phương trình đường thẳng: $ax + by + c = 0,\ x = x_0,\ y = y_0$

- Phương trình đường Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Phương trình đường Hypebol: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

- Phương trình đường Parabol: $y = ax^2 + bx + c,\ x = ay^2 + by + c$

6. Tính chất liên quan đến hình biểu diễn của số phức

Phương pháp: Để chứng minh các điểm biểu diễn cho các số phức thoả mãn điều kiện (T), thông thường ta làm như sau

- Đọc toạ độ các điểm biểu diễn cho các số phức đã cho.
- Dựa vào điều kiện (T), ta qui được bài toán về bài toán hình giải tích trong mặt phẳng.

Chú ý:

- Nếu M_1, M_2, M_3 *lần lượt biểu diễn số phức* z_1, z_2, z_3 *thì:*

- $\overrightarrow{M_2M_1}$ *biểu diễn số phức* $z_1 - z_2$
- $\overrightarrow{OI}$ *(với I là trung điểm* M_1M_2 *) biểu diễn số phức* $\frac{z_1 + z_2}{2}$. *Suy ra:* $2\overrightarrow{OI}$ *biểu diễn số phức* $z_1 + z_2$. *Do đó,* $z_1 + z_2 = 0$ *thì trung điểm I của* M_1, M_2 *trùng với O.*
- $\overrightarrow{OG}$ *(với G là trọng tâm* $M_1M_2M_3$ *) biểu diễn số phức* $\frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. *Suy ra:* $3\overrightarrow{OG}$ *biểu diễn số phức* $z_1 + z_2 + z_3$. *Do đó,* $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ *thì trọng tâm G của tam giác* $M_1M_2M_3$ *trùng với gốc toạ độ O.*

- Nếu $\left|z - (a + bi)\right| = R$ *thì điểm M nằm trên đường tròn tâm I(a;b) bán kính R.*

- Nếu $\left|z_1 - z_2\right| = R$ *thì độ dài* $M_1M_2 = R$

- Nếu $\left|z_0\right| = k$, *số phức z thoả mãn* $\left|z - (a + bi)\right| = R$. *Khi đó, điểm biểu diễn số phức* $z.z_0$ *nằm trên đường tròn I(a;b) bán kính k.R.*

7. Cực trị của số phức

Phương pháp : Các bài toán qui về bài toán tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm một biến, tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của một biểu thức hai biến mà các biến thoả mãn điều kiện cho trước

Bài toán: Trong các số phức z thoả mãn điều kiện T. Tìm số phức z để biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất, lớn nhất

- Từ điều kiện T, biến đổi để tìm cách rút ẩn rồi thế vào biểu thức P để được hàm một biến
- Tìm giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tuỳ theo yêu cầu bài toán của hàm số một biến vừa tìm được.
- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản như: Bất đẳng thức liên hệ giữa trung bình cộng và trung bình nhân, bất đẳng thức Bunhia- Cốpxki, bất đẳng thức hình học.
- Bất đẳng thức liên quan đến số phức:

*) $|z_1|+|z_2|\ge|z_1-z_2|$ *) $\left||z_1|-|z_2|\right|\ge|z_1|-|z_2|$ *) $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$

Chú ý: Bất đẳng thức thường gặp:

1. Bất đẳng thức **Côsi**: Cho $a_1,1_2,...a_n\ge 0$, $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2...a_n}$ Dấu "=" xảy ra khi $a_1=a_2=...a_n$

2. Bất đẳng thức **Bunhiacopski**: $\left(a_1b_1+a_2b_2+...a_nb_n\right)^2\le\left(a_1^2+a_2^2+...+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2\right)$

Dấu "=" xảy ra khi: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=...=\dfrac{a_n}{b_n}$

3. Bất đẳng thức **Mincopski**: $\sqrt{\left(a_1+a_2\right)^2+\left(b_1+b_2\right)^2}\le\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$ Dấu "=" khi $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}>0$

4. Bất đẳng thức tam giác: Cho tam giác ABC, khi đó: $|AB-BC|<AC<AB+BC$

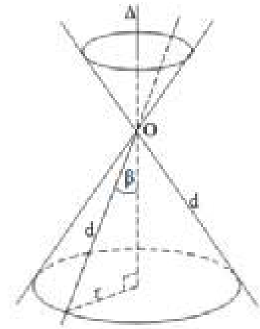
E. NÓN – TRỤ - CẦU

1. MẶT NÓN – HÌNH NÓN

1.1 Mặt nón tròn xoay

Trong mặt phẳng (P), cho 2 đường thẳng d, Δ cắt nhau tại O và chúng tạo thành góc β với $0 < \beta < 90^0$. Hình tròn xoay tạo ra khi quay đường thẳng d xung quanh trục Δ với góc β không thay đổi được gọi là mặt nón tròn xoay đỉnh O (hình 1).

Đường thẳng Δ gọi là trục, đường thẳng d được gọi là đường sinh và góc 2β gọi là góc ở đỉnh của mặt nón.



Hình 1

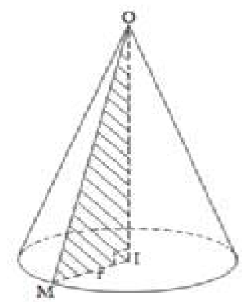
1.2. Hình nón tròn xoay

Cho ΔOIM vuông tại I . Hình tròn xoay tạo ra khi quay đường gấp khúc OMI quanh cạnh góc vuông OI gọi là hình nón tròn xoay (gọi tắt là hình nón) (hình 2).

+ Đường thẳng OI gọi là trục, O là đỉnh, OI gọi là đường cao và OM gọi là đường sinh của hình nón.

+ Hình tròn tâm I, bán kính r = IM là đáy của hình nón.

Khối nón tròn xoay là hình tạo bởi miền tam giác OMI quay quanh cạnh góc vuông OI



Hình 2

1.3. Công thức diện tích và thể tích của hình nón

Cho hình nón có chiều cao là h, bán kính đáy r và đường sinh là ℓ. Học sinh cần nhớ các công thức:

+ Mối liên hệ h, r, ℓ: $h^2 + r^2 = \ell^2$

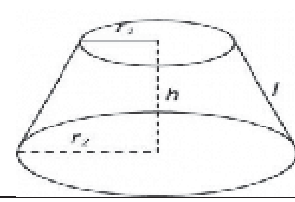
+ Diện tích xung quanh: Sxq=π.r.ℓ

+ Diện tích đáy (hình tròn): $S_đ = \pi.r^2$

+ Diện tích toàn phần hình tròn: $S_{tp} = S_đ + S_{xq}$

+ Thể tích khối nón: $V_{nón} = \frac{1}{3}S_đ.h = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

+ Thể tích khối nón cụt: $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + R.r\right)$



1.4. Tính chất:

* Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng **đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

+ Mặt phẳng cắt mặt nón theo 2 đường sinh ⇒ Thiết diện là tam giác cân.

+ Mặt phẳng tiếp xúc với mặt nón theo một đường sinh. Trong trường hợp này, người ta gọi đó là mặt phẳng tiếp diện của mặt nón.

* Nếu cắt mặt nón tròn xoay bởi mặt phẳng **không đi qua đỉnh** thì có các trường hợp sau xảy ra:

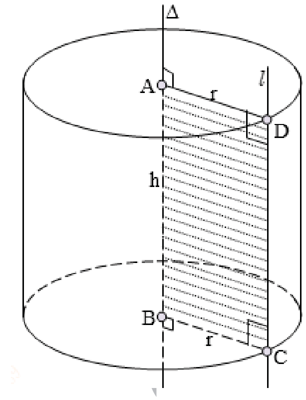
+ Nếu mặt phẳng cắt vuông góc với trục hình nón ⇒ giao tuyến là một đường tròn.

+ Nếu mặt phẳng cắt song song với 2 đường sinh hình nón ⇒ giao tuyến là 2 nhánh của 1 hypebol.

+ Nếu mặt phẳng cắt song song với 1 đường sinh hình nón ⇒ giao tuyến là

2. HÌNH TRỤ - KHỐI TRỤ

2.1. Mặt trụ tròn xoay



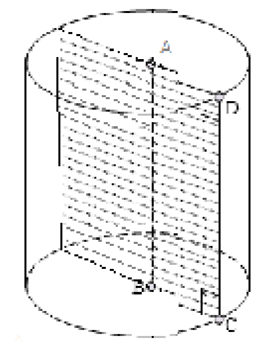
+ Trong mp(P) cho hai đường thẳng Δ và ℓ song song nhau, cách nhau một khoảng r. Khi quay mp(P) quanh trục cố định Δ thì đường thẳng ℓ sinh ra một mặt tròn xoay được gọi là mặt trụ tròn xoay hay gọi tắt là mặt trụ.

+ Đường thẳng Δ được gọi là trục.

+ Đường thẳng ℓ được gọi là đường sinh.

+ Khoảng cách r được gọi là bán kính của mặt trụ.

2.2. Hình trụ tròn xoay



+ Khi quay hình chữ nhật ABCD xung quanh đường thẳng chứa một cạnh, chẳng hạn cạnh AB thì đường gấp khúcABCD tạo thành một hình, hình đó được gọi là hình trụ tròn xoay hay gọi tắt là hình trụ.

+ Đường thẳng AB được gọi là trục.

+ Đoạn thẳng CD được gọi là đường sinh.

+ Độ dài đoạn thẳng AB = CD = h được gọi là chiều cao của hình trụ.

+ Hình tròn tâm A, bán kính r = AD và hình tròn tâm B, bán kính r = BC được gọi là 2 đáy của hình trụ.

+ Khối trụ tròn xoay, gọi tắt là khối trụ, là phần không gian giới hạn bởi hình trụ tròn xoay kể cả hình trụ.

2.3. Công thức tính diện tích và thể tích của hình trụ

Cho hình trụ có chiều cao là h và bán kính đáy bằng r, khi đó:

+ Diện tích xung quanh của hình trụ: $S_{xq} = 2\pi rh$

+ Diện tích toàn phần của hình trụ: $S_{tp}=S_{xq}+S_đ=2\pi rh+2\pi r^2$

+ Thể tích khối trụ: $V = Bh = \pi r^2h$.

2.4. Tính chất

- Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ vuông góc với trục Δ thì ta được đường tròn có tâm trên Δ và có bán kính bằng r với r cũng chính là bán kính của mặt trụ đó.
- Nếu cắt mặt trụ tròn xoay (có bán kính là r) bởi một $mp(\alpha)$ không vuông góc với trục Δ nhưng cắt tất cả các đường sinh, ta được giao tuyến là một đường elíp có trụ nhỏ bằng $2r$ và trục lớn bằng $\dfrac{2r}{\sin\varphi}$, trong đó φ là góc giữa trục Δ và $mp(\alpha)$ với $0^0 < \varphi < 90^0$.
- Cho $mp(\alpha)$ song song với trục Δ của mặt trụ tròn xoay và cách Δ một khoảng k .

  Nếu $k < r$ thì $mp(\alpha)$ cắt mặt trụ theo hai đường sinh $\Rightarrow$ thiết diện là hình chữ nhật.

  Nếu $k = r$ thì $mp(\alpha)$ tiếp xúc với mặt trụ theo một đường sinh.

  Nếu $k > r$ thì $mp(\alpha)$ không cắt mặt trụ.

3. MẶT CẦU – KHỐI CẦU

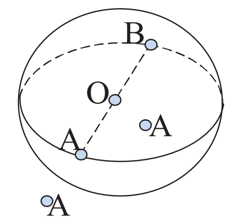
3.1. Mặt cầu – Khối cầu:

Định nghĩa

• **Mặt cầu:** $S(O;R) = \{M | OM = R\}$ • **Khối cầu:** $V(O;R) = \{M | OM \le R\}$

3.2.Vị trí tương đối của một điểm đối với mặt cầu

Cho mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ và một điểm A bất kì, khi đó:



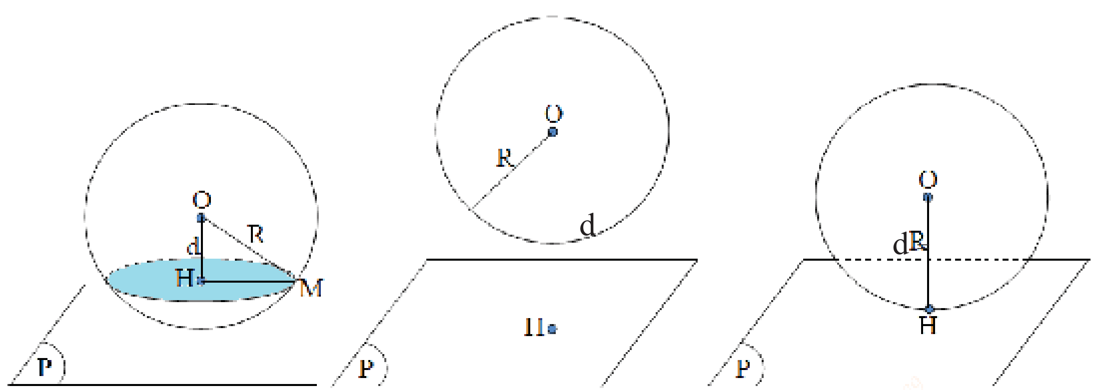
- Nếu $OA=\mathrm{R}\Leftrightarrow A\in S\left(O;\mathrm{R}\right)$. Khi đó OA gọi là bán kính mặt cầu. Nếu OA và OB là hai bán kính sao cho $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OB}$ thì đoạn thẳng AB gọi là 1 đường kính của mặt cầu.
- Nếu $OA<\mathrm{R}\Leftrightarrow A$ nằm trong mặt cầu.
- Nếu $OA>\mathrm{R}\Leftrightarrow A$ nằm ngoài mặt cầu.

  $\Rightarrow$ Khối cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ là tập hợp tất cả các điểm M sao cho $OM\le\mathrm{R}$.

3.3. Vị trí tương đối của mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ và một $mp\left(P\right)$. Gọi d là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến $mp\left(P\right)$ và H là hình chiếu của O trên $mp\left(P\right)\Rightarrow d=OH$.

- Nếu $d<R\Leftrightarrow mp\left(P\right)$ cắt mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ theo giao tuyến là đường tròn nằm trên $mp\left(P\right)$ có tâm là H và bán kính $r=HM=\sqrt{R^2-d^2}=\sqrt{R^2-OH^2}$ (hình a).
- Nếu $d>R\Leftrightarrow mp\left(P\right)$ không cắt mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ (hình b)
- Nếu $d=R\Leftrightarrow mp\left(P\right)$ có một điểm chung duy nhất. Lúc này, ta gọi mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ tiếp xúc $mp\left(P\right)$. Do đó, điều kiện cần và đủ để $mp\left(P\right)$ tiếp xúc với mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ là $d\left(O,mp\left(P\right)\right)=R$ (hình c).



Hình a Hình b Hình c

3.4. Vị trí tương đối của đường thẳng và mặt cầu

Cho mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ và một đường thẳng Δ. Gọi H là hình chiếu của O trên đường thẳng Δ và $d=OH$ là khoảng cách từ tâm O của mặt cầu đến đường thẳng Δ. Khi đó:

- Nếu $d>R\Leftrightarrow\Delta$ không cắt mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$.
- Nếu $d<R\Leftrightarrow\Delta$ cắt mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ tại hai điểm phân biệt.

- Nếu $d = R \Leftrightarrow \Delta$ và mặt cầu tiếp xúc nhau (tại một điểm duy nhất). Do đó: điều kiện cần và đủ để đường thẳng Δ tiếp xúc với mặt cầu là $d = d\left(O, \Delta\right) = R$.

<u>Định lí</u>: Nếu điểm A nằm ngoài mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$ thì:

- Qua A có vô số tiếp tuyến với mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$.
- Độ dài đoạn thẳng nối A với các tiếp điểm đều bằng nhau.
- Tập hợp các điểm này là một đường tròn nằm trên mặt cầu $S\left(O;\mathrm{R}\right)$.

3.5. Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

	Mặt cầu ngoại tiếp
Hình đa diện	Tất cả các đỉnh của hình đa diện đều nằm trên mặt cầu
Hình trụ	Hai đường tròn đáy của hình trụ nằm trên mặt cầu
Hình nón	Mặt cầu đi qua đỉnh và đường tròn đáy của hình nón

a/ Các khái niệm cơ bản

✧ **Trục của đa giác đáy**: là đường thẳng đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy và vuông góc với mặt phẳng chứa đa giác đáy.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên trục của đa giác thì cách đều các đỉnh của đa giác đó.

✧ **Đường trung trực của đoạn thẳng**: là đường thẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên đường trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

✧ **Mặt trung trực của đoạn thẳng**: là mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng và vuông góc với đoạn thẳng đó.
$\Rightarrow$ Bất kì một điểm nào nằm trên mặt trung trực thì cách đều hai đầu mút của đoạn thẳng.

b/ Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

✧ **Tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp**: là điểm cách đều các đỉnh của hình chóp. Hay nói cách khác, nó chính là giao điểm I của trục *đường tròn ngoại tiếp mặt phẳng đáy* và *mặt phẳng trung trực của một cạnh bên* hình chóp.

✧ **Bán kính**: là khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

c/ Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu của một số hình đa diện cơ bản

• Cách 1: Nếu (n – 2) đỉnh của đa diện nhìn hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông thì tâm của mặt cầu là trung điểm của đoạn thẳng nối hai đỉnh đó.

• Cách 2: Để xác định tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

– Xác định trục Δ của đáy (Δ là đường thẳng vuông góc với đáy tại tâm đường tròn ngoại tiếp đa giác đáy).

– Xác định mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên.

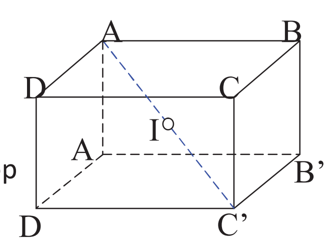
– Giao điểm của (P) và Δ là tâm của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.

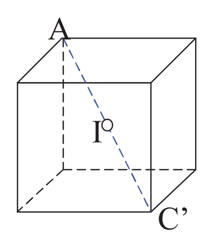
Dạng 1: Hình hộp chữ nhật, hình lập phương.

- **Tâm**: trùng với tâm đối xứng của hình hộp chữ nhật (hình lập phương).

$\Rightarrow$ Tâm là I, là trung điểm của AC'.

- **Bán kính**: bằng nửa độ dài đường chéo hình hộp chữ nhật (hình lập phương).





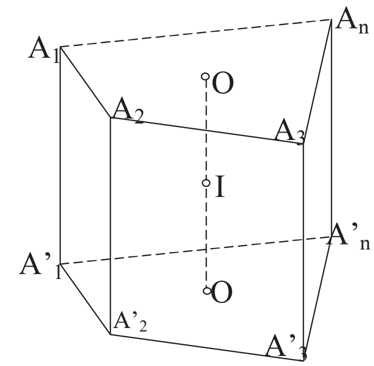
$\Rightarrow$ Bán kính: $R = \dfrac{AC'}{2}$.

Dạng 2: Hình lăng trụ đứng có đáy nội tiếp đường tròn.

Xét hình lăng trụ đứng $A_1A_2A_3...A_n.A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}...A_n^{'}$, trong đó có 2 đáy

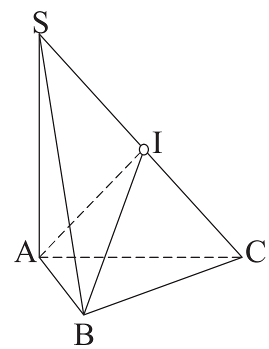
$A_1A_2A_3...A_n$ và $A_1^{'}A_2^{'}A_3^{'}...A_n^{'}$ nội tiếp đường tròn (O) và (O'). Lúc đó,
mặt cầu nội tiếp hình lăng trụ đứng có:

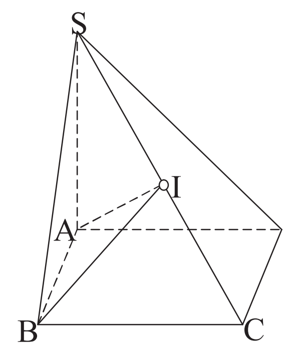
- **Tâm**: I với I là trung điểm của OO'.
- **Bán kính**: $R = IA_1 = IA_2 = ... = IA_n^{'}$.



Dạng 3: Hình chóp có các đỉnh nhìn đoạn thẳng nối 2 đỉnh còn lại dưới 1 góc vuông.

- Hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC$.
- Hình chóp $S.ABCD$ có $\widehat{SAC} = \widehat{SBC} = \widehat{SDC} = 90^0$.
  + Tâm: I là trung điểm của SC.
  + Bán kính: $R = \dfrac{SC}{2} = IA = IB = IC = ID$.





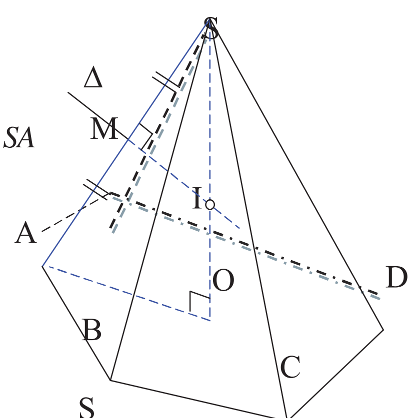
Dạng 4: Hình chóp đều.

Cho hình chóp đều $S.ABC...$

- Gọi O là tâm của đáy $\Rightarrow SO$ là trục của đáy.
- Trong mặt phẳng xác định bởi SO và một cạnh bên, chẳng hạn như $mp(SAO)$, ta vẽ đường trung trực của cạnh SA là Δ cắt SA tại M và cắt SO tại $I \Rightarrow I$ là tâm của mặt cầu.
- Bán kính:

  Ta có: $\Delta SMI \sim \Delta SOA \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{SI}{SA} \Rightarrow$ Bán kính là:

  $R = IS = \dfrac{SM.SA}{SO} = \dfrac{SA^2}{2SO} = IA = IB = IC = ...$

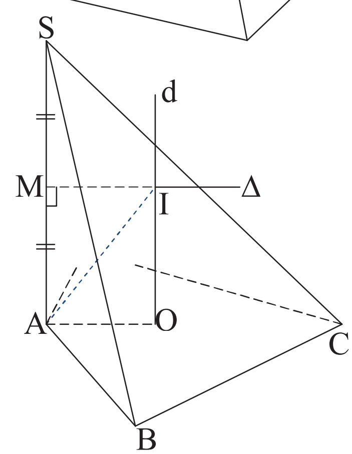


Dạng 5: Hình chóp có cạnh bên vuông góc với mặt phẳng đáy.

Cho hình chóp $S.ABC...$ có cạnh bên $SA \perp$ đáy $(ABC...)$ và đáy $ABC...$ nội tiếp được trong đường tròn tâm O. Tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC...$ được xác định như sau:

- Từ tâm O ngoại tiếp của đường tròn đáy, ta vẽ đường thẳng d vuông góc với $mp(ABC...)$ tại O.
- Trong $mp(d, SA)$, ta dựng đường trung trực Δ của cạnh SA, cắt SA tại M, cắt d tại I.

  $\Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp và bán kính $R = IA = IB = IC = IS = ...$
- <u>Tìm bán kính</u>:



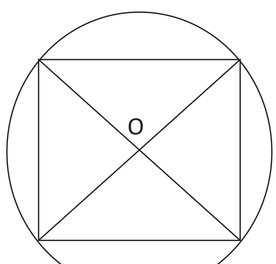
Ta có: $MIOB$ là hình chữ nhật.Xét ΔMAI vuông tại M có: $R = AI = \sqrt{MI^2 + MA^2} = \sqrt{AO^2 + \left(\dfrac{SA}{2}\right)^2}$.

Dạng 6: Hình chóp khác.

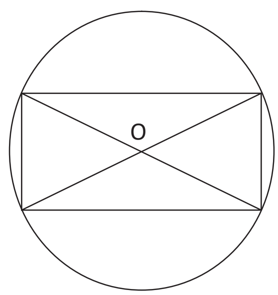
- Dựng trục Δ của đáy.
- Dựng mặt phẳng trung trực (α) của một cạnh bên bất kì.
- $(\alpha) \cap \Delta = I \Rightarrow I$ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Bán kính: khoảng cách từ I đến các đỉnh của hình chóp.

Chú ý:

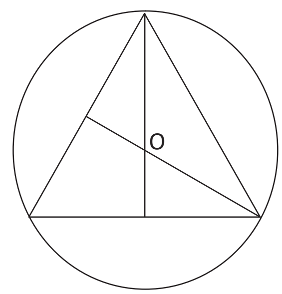
- Điều kiện để một hình chóp nội tiếp mặt cầu là đáy nội tiếp một đường tròn
- Đường tròn ngoại tiếp một số đa giác thường gặp. Khi xác định tâm mặt cầu, ta cần xác định trục của mặt phẳng đáy, đó chính là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng đáy tại tâm O của đường tròn ngoại tiếp đáy. Do đó, việc xác định tâm ngoại O là yếu tố rất quan trọng của bài toán.



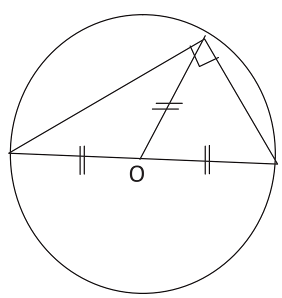
Hình vuông: O là giao điểm 2 đường chéo.



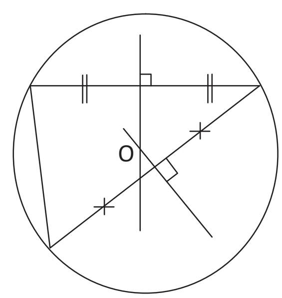
Hình chữ nhật: O là giao điểm của hai đường chéo.



Δ đều: O là giao điểm của 2 đường trung tuyến (trọng tâm).



Δ vuông: O là trung điểm của cạnh huyền.



Δ thường: O là giao điểm của hai đường trung trực của hai cạnh Δ.

- Hình chóp có các cạnh bên đều bằng nhau luôn nội tiếp một mặt cầu.
- Các đỉnh của một hình đa diện luôn nhìn một đoạn thẳng một góc vuông thì hình đa diện đó nội tiếp mặt cầu, có tâm là trung điểm đoạn thẳng.

3.6. Diện tích và thể tích mặt cầu

* Diện tích mặt cầu: $\boxed{S_C = 4\pi R^2}$.

* Thể tích mặt cầu: $\boxed{V_C = \dfrac{4}{3}\pi R^3}$.

3.6. Mặt cầu nội tiếp

	Mặt cầu nội tiếp
Hình đa diện	Tất cả các mặt của hình đa diện đều tiếp xúc với mặt cầu
Hình trụ	Mặt cầu tiếp xúc với các mặt đáy và mọi đường sinh của hình trụ
Hình nón	Mặt cầu tiếp xúc với mặt đáy và mọi đường sinh của hình nón

a) Định nghĩa 1*:* mặt phẳng phân giác của một góc là mặt phẳng qua gốc và mọi điểm nằm trên mặt phẳng đều cách đều 2 tia của góc.

Tương tự ta cũng định nghĩa mặt phẳng phân giác của một góc nhị diện là tập hợp tất cả các điểm trong không gian sao cho khoảng cách từ điểm đó đến mỗi mặt phẳng của nhị diện là như nhau.

b) Định nghĩa 2*:* Mặt cầu nội tiếp đa diện là mặt cầu tiếp xúc tất cả các mặt của đa diện. Khi đó ta cũng nói đa diện ngoại tiếp mặt cầu.

Chú ý:

- Tất cả các tứ diện và tất cả các đa diện đều đều có mặt cầu nội tiếp và với đa diện đều thì tâm của mặt cầu nội tiếp trùng với tâm của mặt cầu ngoại tiếp.
- Một lăng trụ có mặt cầu nội tiếp khi và chỉ khi lăng trụ đó là lăng trụ đứng có mặt đáy là đa giác ngoại tiếp được đường tròn và có chiều cao bằng 2 lần bán kính đường tròn nội tiếp đa giác đáy.
- Nếu chân đường đường cao của hình chóp cách đều các cạnh trong mặt đáy thì hình chóp có mặt cầu nội tiếp.
- Nếu hình chóp có các mặt bên tạo với đáy các góc bằng nhau thì hình chóp có mặt cầu nội tiếp.

c) Cách xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp một hình chóp

*** Xác định tâm:**

- Dựng 3 mặt phẳng phân giác của góc tạo bởi hai mặt phẳng (Mặt phẳng chứa đường phân giác của một góc nằm trong mặt phẳng vuông góc với giao tuyến của hai mặt đó)

- Tìm điểm chung của 3 giao tuyến (ba giao tuyên không song song) của ba mặt phẳng phân giác. Suy ra, tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

Đặc biệt: Nếu H là chân đường cao của hình chóp và cách đều các mặt bên. Gọi I là hình chiếu của S xuống 1 cạnh đáy. Ta dựng đường phân giác của góc $\widehat{SIH}$ cắt SH tại tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp.

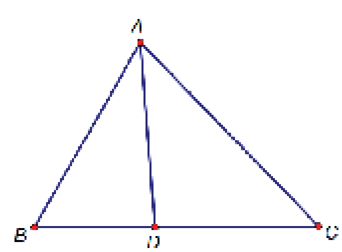
*** Xác định bán kính**

Cách 1: Bán kính mặt cầu nội tiếp đa diện được tính theo công thức $r=\dfrac{3V}{\sum\limits_{i=1}^{n}S_i}$ Trong đó S_i là diện là diện tích của mặt thứ i của đa diện.

Cách 2: Sử dụng hệ thức phân giác:

AD là phân giác trong của tam giác ABC. Khi đó

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BA}{CA}$$



F. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

I. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

1. Ứng dụng tích có hướng

- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$
- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b}=0$
- $\vec{u},\vec{v},\ \vec{w}$ không đồng phẳng $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}\neq\vec{0}\quad(*)$.
- $\vec{u},\vec{v},\ \vec{w}$ đồng phẳng $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{w}=\vec{0}\quad(*)$ (ba véc tơ có giá song song hoặc nằm trên một mặt phẳng).
- A, B, C không thẳng hàng(3 đỉnh của một tam giác) $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\neq\vec{0}$.
- A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{0}$.
- Bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0\quad(*)$ (bốn điểm nằm trên một mặt phẳng).
- Bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\neq 0\quad(*)$ (bốn đỉnh của một tứ diện).
- Diện tích hình bình hành: $S_{ABCD}=\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right\|\quad(*)$
- Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|\quad(*)$; $S_{\Delta ABC}=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2.\overrightarrow{AC}^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$
- Thể tích khối hộp: $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|\quad(*)$
- Thể tích tứ diện: $V_{ABCD}=\dfrac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|\quad(*)$

2. Cho $A(x_A;\,y_A;\,z_A),\ B(x_B;\,y_B;\,z_B)$

- $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
- $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC: $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:
  $$G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\dfrac{z_A+z_B+z_C+z_C}{4}\right)$$
- ABCD là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
- Cho ΔABC có các chân E, F của các đường phân giác trong và ngoài của góc A của ΔABC trên BC. Ta có: $\overrightarrow{FB}=\dfrac{AB}{AC}.\overrightarrow{FC}$

- Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k ($\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$) thì ta có :

  $x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k}; y_M = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k}; z_M = \dfrac{z_A - kz_B}{1-k}$ Với k ≠ 1

- Cho điểm M(a;b;c). Hình chiếu của M lên Ox, Oy,Oz, (Oxy), (Oyz), (Oxz) lần lợt là: $M_1(a;0;0)$, $M_2(0;b;0)$, $M_3(0;0;c)$, $M_4(a;b;0)$, $M_5(0;b;c)$, $M_6(a;0;c)$
- Cho điểm M(a;b;c). Điểm đối xứng với điểm M qua Ox, Oy,Oz, (Oxy),(Oyz), (Oxz) lần lợt là: $M_7(a;-b;-c)$, $M_8(-a;b;-c)$, $M_9(-a;-b;c)$, $M_{10}(a;b;-c)$, $M_{11}(-a;b;c)$, $M_{12}(a;-b;c)$
- Cho điểm M(a;b;c). Điểm đối xứng với M qua O là $M_{13}(-a;-b;-c)$.
- Điểm thuộc trục Ox, Oy, Oz lần lượt có toạ độ : $(x_0;0;0),(0;y_0;0),(0;0;z_0)$. Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy), (Oyz), (Oxz) lượt có toạ độ là : $(x_0;y_o;0),(0;y_0;z_0),(x_0;0;z_0)$.

II. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

- Một số vấn đề trọng tâm

1. Phương trình mặt cầu: Mặt cầu có tâm I(a; b; c) và bán kính R : $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$

Phương trình mặt cầu dạng khai triển:$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, đk: $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ (2)

Tâm I(a; b; c) và bán kính R= $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$

2. Chú ý:

- Mặt cầu có tâm I và qua A thì R = IA = $\sqrt{(x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2 + (z_A - z_I)^2}$
- Mặt cầu có đường kính AB thì R = $\dfrac{1}{2}AB$ và tâm I là trung điểm AB
- Mặt cầu qua 4 điểm A, B,C, D thì viết phương trình mặt cầu ở dạng (2) rồi thay tọa độ từng điểm vào phương trình và giải hệ để tìm a, b, c, d. (Hoặc)

3. Vị trí tương đối của điểm với mặt cầu:

Cho $(S): (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$ và điểm $M(x_0;y_0;z_0)$, Gọi $I(a;b;c)$ là tâm mc(S), R là bán kính của mặt cầu.

- IM > R→ Điểm M nằm ngoài mặt cầu (S)
- IM < R→ Điểm M nằm trong mặt cầu (S)
- IM = R → Điểm M thuộc mặt cầu (S) (Hay Thay tọa độ điểm M vào PT mặt cầu thỏa mãn)

4*. Vị trí tương đối giữa hai mặt cầu:*

Cho hai mặt cầu $S_1(I_1, R_1)$ và $S_2(I_2, R_2)$.

- $I_1I_2 < |R_1 - R_2|$ ⇔ *(S_1), (S_2) trong nhau*
- $I_1I_2 > R_1 + R_2$ ⇔ *(S_1), (S_2) ngoài nhau*
- $I_1I_2 = |R_1 - R_2|$ ⇔ *(S_1), (S_2) tiếp xúc trong*
- $I_1I_2 = R_1 + R_2$ ⇔ *(S_1), (S_2) tiếp xúc ngoài*
- $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$ ⇔ *(S_1), (S_2) cắt nhau theo một đường tròn.*

5. Vị trí tương đối giữa mặt phẳng và mặt cầu

Cho mặt phẳng. và mặt cầu . $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R . Gọi $d=d(I;(\alpha))=\dfrac{|A.a+B.b+C.c+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

+ Nếu $d>R\Rightarrow$ (α) và (S) không giao nhau.

+ Nếu $d=R\Rightarrow$ (α) và (S) tiếp xúc nhau tại một điểm H. ((α) gọi là tiếp diện của mặt cầu (S)).

+ Nếu $d<R\Rightarrow$ (α) và (S) cắt nhau theo giao tuyến là một đường tròn (C) có bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$ và có tâm H là hình chiếu vuông góc của I trên (α).

Lưu ý: Để tìm tọa độ tâm H của đường tròn (C) ta làm như sau

- Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua I và vuông góc với (α).
- Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ gồm phương trình của Δ và phương trình (α).

6. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt cầu

Cho đường thẳng thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\\z=z_0+ct\end{cases}$ và mặt cầu (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$

Gọi $d=d(I,\Delta)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0I}\right]\right|}{|\vec{u}|}$, trong đó $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\Delta,\ \vec{u}=(a;b;c)$ là VTCP của Δ

+ Nếu $d>R\Rightarrow$ Δ và (S) không có điểm chung

+ Nếu $d=R\Rightarrow$ Δ tiếp xúc với (S) (Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (S))

+ Nếu $d<R\Rightarrow$ Δ cắt (S) tai hai điểm A, B (Δ gọi là cát tuyến của mặt cầu (S)).

III. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M_o(x_0;y_0;z_0)$ và có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ có phương trình

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Chú ý:

Véc tơ $\vec{n}\neq\vec{0}$ vuông góc với mặt phẳng (α) được gọi là VTPT của mặt phẳng (α).

Véc tơ $\vec{u}\neq\vec{0}$ có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) được gọi là VTCP của mặt phẳng (α).

Nếu $\vec{u},\vec{v}$ là hai véc tơ không cùng phương có giá song song hoặc nằm trên mặt phẳng (α) thì $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (α).

Nếu ba điểm A, B, C không thẳng hàng thì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\vec{n}$ là một VTPT của mặt phẳng (ABC).

Các trường hợp riêng

Các hệ số	Phương trình mặt phẳng (α)	Tính chất mặt phẳng (α)
D = 0	$Ax+By+Cz=0$	(α) đi qua gốc toạ độ O
A = 0	$By+Cz+D=0$	(α) // Ox hoặc (α) $\supset$ Ox
B = 0	$Ax+Cz+D=0$	(α) // Oy hoặc (α) $\supset$ Oy
C = 0	$Ax+By+D=0$	(α) // Oz hoặc (α) $\supset$ Oz
A = B = 0	$Cz+D=0$	(α) // (Oxy) hoặc (α) $\equiv$ (Oxy)

+Nếu trong phương trình của (α) không chứa ẩn nào thì (α) song song hoặc chứa trục tương ứng.

+ Phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. ($\alpha$) cắt các trục toạ độ tại các điểm (a; 0; 0), (0; b; 0), (0; 0; c)

2. Vị trí tương đối giữa hai mặt phẳng

Cho $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ khi đó:

* $(\alpha)\parallel(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{n},\overrightarrow{n'}\right]=\vec{0}\\ \left[\vec{n},\overrightarrow{MM'}\right]\neq\vec{0}\end{cases}$.   * $(\alpha)\equiv(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\vec{n},\overrightarrow{n'}\right]=\vec{0}\\ \left[\vec{n},\overrightarrow{MM'}\right]=\vec{0}\end{cases}$

* $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau $\Leftrightarrow$ $\left[\vec{n},\overrightarrow{n'}\right]\neq\vec{0}$

Trường hợp đặc biệt: $A'.B'.C'.D'\neq 0$

+ $(\alpha)\parallel(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}=k\overrightarrow{n'}\\ D\neq kD'\end{cases}\Leftrightarrow\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}\neq\frac{D}{D'}$

+ $(\alpha)\equiv(\beta)\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{n}=k\overrightarrow{n'}\\ D=kD'\end{cases}\Leftrightarrow\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}=\frac{D}{D'}$

+ (α) và (β) cắt nhau $\Leftrightarrow\vec{n}\neq k\overrightarrow{n'}\Leftrightarrow(A:B:C)\neq(A':B':C')$

+ (α) và (β) vuông góc vớ nhau $\vec{n}.\overrightarrow{n'}=0\Leftrightarrow AA'+BB'+CC'=0$

3. Vị trí tương đối giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng $\Delta:\begin{cases}x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$; $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\Delta, VTCP\ \vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$.

Xét phương trình $A(x_0+at)+B(y_0+bt)+C(z_0+ct)+D=0$ (*) ẩn là t, khi đó

+ $\Delta\parallel(\alpha)\Leftrightarrow$ phương trình (*) vô nghiệm $\left(\vec{u}.\vec{n}=0, M_0\notin(\alpha)\right)$

+ $\Delta\subset(\alpha)\Leftrightarrow$ phương trình (*) có vô số nghiệm $\left(\vec{u}.\vec{n}=0, M_0\in(\alpha)\right)$

+ Δ và (α) cắt nhau tại một điểm $\Leftrightarrow$ phương trình (*) có nghiệm duy nhất $\left(\vec{u}.\vec{n}\neq 0\right)$

Lưu ý: $\Delta\perp(\alpha)\Leftrightarrow\vec{u}=k\vec{n}$

4. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ thì

$$\sin(\Delta,(\alpha))=\left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right|=\frac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{|Aa+Bb+Cc|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{a^2+b^2+c^2}};\left(0^0\le(\Delta,\alpha)\le 90^0\right)$$

5. Góc giữa hai mặt phẳng

Nếu mặt phẳng (α) có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$ và mặt phẳng (β) có VTPT $\vec{n'}=\left(A';B';C'\right)$ thì

$$\cos((\alpha),(\beta))=\left|\cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)\right|=\frac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|}=\frac{|AA'+BB'+CC'|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}};\ \left(0^0\le(\alpha,\beta)\le 90^0\right)$$

6. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

Cho điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và mp$(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ thì:

$$d\left(M_0;(\alpha)\right)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

7. Khoảng cách từ đường thẳng đến mặt phẳng song song

Cho đường thẳng $\Delta\,||\,(\alpha)$: $Ax+By+Cz+D=0$, $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm thuộc Δ

$$d(\Delta,(\alpha))=d\left(M_0;(\alpha)\right)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

8. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$, khi đó

$$d((\alpha),(\beta))=d\left(M_0;(\beta)\right)=\frac{|A'x_0+B'y_0+C'z_0+D'|}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$. trong đó $M_0(x_0;y_0;z_0)$ là một điểm $\in(\alpha)$

9. Một số dạng lập phương trình mặt phẳng thường gặp

Lập phương trình mặt phẳng (α) ta cần xác định một ***điểm*** *thuộc (α) và một* ***VTPT*** *của nó.*

Dạng 1: *(α)* đi qua điểm . $M(x_0;y_0;z_0)$ có VTPT $\vec{n}=(A;B;C)$:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Dạng 2: *(α)* đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ có cặp VTCP $\vec{a},\vec{b}$: *Khi đó một VTPT của (α) là* $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Dạng 3: *(α)* đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ và song song với mặt phẳng *(β): Ax + By + Cz + D = 0*:

$$(\alpha):\ A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Dạng 4: *(α)* đi qua 3 điểm không thẳng hàng A, B, C: *Khi đó ta có thể xác định một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$

Dạng 5: *(α)* đi qua một điểm M và một đường thẳng (d) không chứa M:

– *Trên (d) lấy điểm A và VTCP* $\vec{u}$.

– *Một VTPT của (α) là:* $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AM},\vec{u}\right]$

Dạng 6: *(α)* đi qua một điểm M và vuông góc với một đường thẳng (d):

VTCP $\vec{u}$ của đường thẳng (d) là một VTPT của (α).

Dạng 7: *(α)* đi qua 2 đường thẳng cắt nhau d_1, d_2:

– Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– Lấy một điểm M thuộc d_1 hoặc $d_2 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 8: *(α)* chứa đường thẳng d_1 và song song với đường thẳng d_2 *(d_1, d_2 chéo nhau)*:

– Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

– Lấy một điểm M thuộc $d_1 \Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 9: *(α)* đi qua điểm M và song song với hai đường thẳng chéo nhau d_1, d_2:

– Xác định các VTCP $\vec{a},\vec{b}$ của các đường thẳng d_1, d_2.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$.

Dạng 10: *(α)* đi qua một đường thẳng (d) và vuông góc với một mặt phẳng (β):

– Xác định VTCP $\vec{u}$ của (d) và VTPT $\vec{n}_\beta$ của (β).

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{u},\vec{n}_\beta\right]$.

– Lấy một điểm M thuộc d $\Rightarrow M \in (\alpha)$.

Dạng 11: *(α)* đi qua điểm M và vuông góc với hai mặt phẳng cắt nhau (β), (γ):

– Xác định các VTPT $\vec{n}_\beta,\vec{n}_\gamma$ của (β) và (γ).

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\left[\vec{u}_\beta,\vec{n}_\gamma\right]$.

Dạng 12: *(α)* đi qua đường thẳng (d) cho trước và cách điểm M cho trước một khoảng k cho trước:

– Giả sử (α) có phương trình: $Ax+By+Cz+D=0\ \left(A^2+B^2+C^2\neq 0\right)$.

– Lấy 2 điểm A, B $\in$ (d) $\Rightarrow$ A, B $\in$ (α) (ta được hai phương trình (1), (2)).

– Từ điều kiện khoảng cách $d(M,(\alpha))=k$, ta được phương trình (3).

– Giải hệ phương trình (1), (2), (3) (bằng cách cho giá trị một ẩn, tìm các ẩn còn lại).

Dạng 13: *(α)* là tiếp xúc với mặt cầu (S) tại điểm H:

– Giả sử mặt cầu (S) có tâm I và bán kính R.

– Một VTPT của (α) là: $\vec{n}=\overrightarrow{IH}$

IV. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

1. Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_o(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{u}=\left(a;b;c\right)$, khi đó

+ Phương trình tham số là: $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases};(t\in R)$, t gọi là tham số.

+ Phương trình chính tắc là: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}=\dfrac{z-z_0}{c}\ \ (abc\neq 0)$.

***Chú ý*:**

Véc tơ $\vec{u}\neq\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ được gọi là VTCP của đường thẳng Δ.

Nếu hai mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ giao nhau thì

hệ phương trình: $\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$ được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong không gian.

2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$; $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\Delta, VTCP\ \vec{u}=(a;b;c)$

$\Delta': \begin{cases} x=x'_0+a't' \\ y=y'_0+b't' \\ z=z'_0+c't' \end{cases}$; $M'_0(x'_0;y'_0;z'_0)\in\Delta', VTCP\ \vec{u'}=(a';b';c')$

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x_0+at=x'_0+a't' \\ y_0+bt=y'_0+b't' \\ z_0+ct=z'_0+c't' \end{cases}$ (I), khi đó

+ $\Delta\equiv\Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}=k\vec{u'} \\ M_0\in\Delta'\ \left(M'_0\in\Delta\right) \end{cases}$, hay hệ phương trình (I) có vô số nghiệm.

+ $\Delta \parallel \Delta' \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}=k\vec{u'} \\ M_0\notin\Delta'\ \left(M'_0\notin\Delta\right) \end{cases}$, hay $\vec{u}=k\vec{u'}$ và hệ (I) vô nghiệm.

+ Δ và Δ' cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{u}\neq k\vec{u'}$ và hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $\left(hay\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}=0\right)$.

+ Δ và Δ' chéo nhau $\Leftrightarrow \vec{u}\neq k\vec{u'}$ và hệ phương trình (I) vô nghiệm $\left(hay\left[\vec{u},\vec{u'}\right].\overrightarrow{M_0M'_0}\neq 0\right)$

3. Góc giữa hai đường thẳng

Nếu đường thẳng Δ có VTCP $\vec{u}=(a;b;c)$ và đường thẳng Δ' có VTCP $\vec{u}=(a';b';c')$ thì

$$\cos\left(\Delta,\Delta'\right)=\frac{\left|\vec{u}.\vec{u'}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{u'}\right|}=\frac{\left|aa'+bb'+cc'\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}.\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}};\ \left(0^0\le\left(\Delta,\Delta'\right)\le 90^0\right)$$

4. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Khoảng cách từ điểm $M\left(x_M;y_M;z_M\right)$ đến đường thẳng

$\Delta: \begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \\ z=z_0+ct \end{cases}$; $M_0(x_0;y_0;z_0)\in\Delta, VTCP\ \vec{u}=(a;b;c)$; được tính bởi CT: $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\overrightarrow{M_0M}\right]\right|}{\left|\vec{u}\right|}$

5. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Nếu đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có $VTCP\ \vec{u}=(a;b;c)$.Đường thẳng $\Delta^{'}$ đi qua điểm $M_0^{'}(x_0^{'};y_0^{'};z_0^{'})$ và có $VTCP\ \vec{u^{'}}=(a^{'};b^{'};c^{'})$ thì $d\left(\Delta,\Delta^{'}\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u},\vec{u^{'}}\right].\overrightarrow{M_0M_0^{'}}\right|}{\left|\left[\vec{u},\vec{u^{'}}\right]\right|}$

Lưu ý: Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song bằng khoảng cách từ một điểm nằm trênđường thẳng này đến đường thẳng còn lại, nghĩa là $d\left(\Delta,\Delta^{'}\right)=d\left(M_0,\Delta^{'}\right)=\dfrac{\left|\left[\vec{u^{'}},\overrightarrow{M_0M_0^{'}}\right]\right|}{\left|\vec{u^{'}}\right|}$, $M_0\in\Delta$.

6. Một số dạng lập phương trình đường thẳng thường gặp

*Lập phương trình đường thẳng d ta cần xác định một **điểm** thuộc d và một **VTCP** của nó.*

Dạng 1: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và có VTCP $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$:

$$\boxed{(d):\begin{cases}x=x_o+a_1t\\ y=y_o+a_2t\\ z=z_o+a_3t\end{cases}\qquad (t\in R)}$$

Dạng 2: *d* đi qua hai điểm *A, B*:

Một VTCP của d là $\overrightarrow{AB}$.

Dạng 3: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và song song với đường thẳng Δ cho trước:

Vì d // Δ nên VTCP của Δ cũng là VTCP của d.

Dạng 4: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước:

Vì d $\perp$ (P) nên VTPT của (P) cũng là VTCP của d.

Dạng 5: *d* là giao tuyến của hai mặt phẳng (P), (Q):

- *Cách 1: Tìm một điểm và một VTCP.*

  – Tìm toạ độ một điểm A $\in$ d: bằng cách giải hệ phương trình $\begin{cases}(P)\\(Q)\end{cases}$

  – Tìm một VTCP của d: $\vec{a}=\left[\vec{n}_P,\vec{n}_Q\right]$

- *Cách 2: Tìm hai điểm A, B thuộc d, rồi viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm đó.*

Dạng 6: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và vuông góc với hai đường thẳng d_1, d_2:

Vì d $\perp$ d_1, d $\perp$ d_2 nên một VTCP của d là: $\vec{a}=\left[\vec{a}_{d_1},\vec{a}_{d_2}\right]$

Dạng 7: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$, vuông góc và cắt đường thẳng Δ.

- *Cách 1: Gọi H là hình chiếu vuông góc của M_0 trên đường thẳng Δ.* $\begin{cases}H\in\Delta\\ \overrightarrow{M_0H}\perp\vec{u}_\Delta\end{cases}$

Khi đó đường thẳng d là đường thẳng đi qua M_0, H.

- *Cách 2: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d; (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d. Khi đó d = (P) $\cap$ (Q)*

Dạng 8: *d* đi qua điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ và cắt hai đường thẳng d_1, d_2:

- *Cách 1: Gọi $M_1\in d_1$, $M_2\in d_2$. Từ điều kiện M, M_1, M_2 thẳng hàng ta tìm được M_1, M_2. Từ đó suy ra phương trình đường thẳng d.*

• *Cách 2: Gọi (P) = (M_0, d_1), (Q) = (M_0, d_2). Khi đó d = (P) ∩ (Q). Do đó, một VTCP của d có thể chọn là $\vec{a} = \left[\vec{n}_P, \vec{n}_Q\right]$.*

Dạng 9: *d* nằm trong mặt phẳng (P) và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Tìm các giao điểm A = $d_1 \cap$ (P), B = $d_2 \cap$ (P). Khi đó d chính là đường thẳng AB.

Dạng 10: *d* song song với Δ và cắt cả hai đường thẳng d_1, d_2:

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa Δ và d_1, mặt phẳng (Q) chứa Δ và d_2.

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Dạng 11: *d* là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d_1, d_2 chéo nhau:

• *Cách 1: Gọi M ∈ d_1, N ∈ d_2. Từ điều kiện $\begin{cases} MN \perp d_1 \\ MN \perp d_2 \end{cases}$, ta tìm được M, N.*

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• *Cách 2:*

– *Vì d ⊥ d_1 và d ⊥ d_2 nên một VTCP của d có thể là: $\vec{a} = \left[\vec{a}_{d_1}, \vec{a}_{d_2}\right]$.*

– *Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa d và d_1, bằng cách:*

+ *Lấy một điểm A trên d_1.*

+ *Một VTPT của (P) có thể là: $\vec{n}_P = \left[\vec{a}, \vec{a}_{d_1}\right]$.*

– *Tương tự lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa d và d_2.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Dạng 12: *d* là hình chiếu của đường thẳng Δ lên mặt phẳng (P):

• *Lập phương trình mặt phẳng (Q) chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (P) bằng cách:*

– *Lấy M ∈ Δ.*

– *Vì (Q) chứa Δ và vuông góc với (P) nên $\vec{n}_Q = \left[\vec{a}_\Delta, \vec{n}_P\right]$.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

Dạng 13: *d* đi qua điểm M, vuông góc với d_1 và cắt d_2:

• *Cách 1: Gọi N là giao điểm của d và d_2. Từ điều kiện MN ⊥ d_1, ta tìm được N.*

Khi đó, d là đường thẳng MN.

• *Cách 2:*

– *Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d_1.*

– *Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa M và d_2.*

Khi đó d = (P) ∩ (Q).

- Một số dạng toán khác

1. Xác định hình chiếu H của một điểm M lên đường thẳng d

• *Cách 1:* – *Viết phương trình mặt phẳng (P) qua M và vuông góc với d.*

– *Khi đó: H = d ∩ (P)*

• *Cách 2:* *Điểm H được xác định bởi:* $\begin{cases} H \in d \\ \overrightarrow{MH} \perp \vec{a}_d \end{cases}$

3. Điểm đối xứng M' của một điểm M qua đường thẳng d

• *Cách 1:* – *Tìm điểm H là hình chiếu của M trên d.*

– *Xác định điểm M′ sao cho H là trung điểm của đoạn MM′.*

• *Cách 2:– Gọi H là trung điểm của đoạn MM′. Tính toạ độ điểm H theo toạ độ của M, M′.*

– *Khi đó toạ độ của điểm M′ được xác định bởi:* $\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \perp \vec{a}_d \\ H \in d \end{cases}$.

4.Xác định hình chiếu H của một điểm M lên mặt phẳng (P)

• *Cách 1:* – *Viết phương trình đường thẳng d qua M và vuông góc với (P).*

– *Khi đó: H = d ∩ (P)*

- *Cách 2:* *Điểm H được xác định bởi:* $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH},\ \vec{n}_P \text{ cùng phương} \end{cases}$

5.Điểm đối xứng M' của một điểm M qua mặt phẳng (P)

- *Cách 1:* *– Tìm điểm H là hình chiếu của M trên (P).*
  – Xác định điểm M′ sao cho H là trung điểm của đoạn MM′.
- *Cách 2:* *– Gọi H là trung điểm của đoạn MM′. Tính toạ độ điểm H theo toạ độ của M, M′.*
  – Khi đó toạ độ của điểm M′ được xác định bởi: $\begin{cases} H \in (P) \\ \overrightarrow{MH},\ \vec{n}_P \text{ cùng phương} \end{cases}$.

6. Cực trị trong không gian

Dạng 1: A, B cố định. Đường thẳng d thay đổi qua B. Khi đó. $d(A,\Delta)$ lớn nhất khi AB vuông góc với d.

Dạng 2: A, B cố định. Mặt phẳng (P) thay đổi qua B. Khi đó. $d(A,(P))$ lớn nhất khi AB vuông góc với (P).

Dạng 3: A cố định và M thay đổi trên mặt cầu (S) tâm I. Khi đó MA lớn nhất=R+IA, MA nhỏ nhất=|R-IA| khi và chỉ khi M là giao điểm của IA và mặt cầu (S).

Dạng 4: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ cố định, khoảng cách $A \notin \Delta$ tới (P) lớn nhất khi (P) qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ là vecto pháp tuyến, trong đó K là hình chiếu của A lên Δ.

Dạng 5: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ cố định, tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất khi $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}.\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{n_P}\right]\right]$

Dạng 6: Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ cố định, tạo với mặt phẳng d một góc lớn nhất khi $\overrightarrow{n_P} = \left[\overrightarrow{u_\Delta}.\left[\overrightarrow{u_\Delta}, \overrightarrow{u_d}\right]\right]$

Dạng 7:Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P), đi qua M sao cho khoảng cách từ $A \notin (P)$ cố định tới d nhỏ nhất, lớn nhất.

TH1: $d(a,\Delta)$ nhỏ nhất khi Δ đi qua M và hình chiếu của A lên (P).

TH2: $d(a,\Delta)$ lớn nhất khi Δ là giao tuyến của (P) và mặt phẳng (Q) qua M nhận AM là vecto phap tuyến (hay $\overrightarrow{u_\Delta} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{n_P}\right]$

Dạng 8: Tìm M thuộc mặt cầu (S) tâm I sao cho khoảng cách từ M đến (P) lớn nhất, nhỏ nhất. Khi đó, M là giao điểm của đường thẳng d (qua I vuông góc với (P)) và mặt cầu (S).

Dạng 9: Tìm M thuộc mặt cầu (S) tâm I sao cho khoảng cách từ M đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất. Khi đó, M là giao điểm của đường thẳng d’ (d’ qua I vuông góc với Δ và d’ nằm trong mp(I, Δ)) và mặt cầu (S).

Bổ sung:

1. $\alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + ... + \alpha_n MA_n^2$ hoặc $\left|\alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{MA_n}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất (lớn nhất) khi và chỉ khi MI nhỏ nhất (lớn nhất), trong đó K là điểm thoả mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{MI_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MI_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{MI_n} = \vec{0}$.

2. Cho A, B cố định, M thuộc mặt phẳng (P) sao cho: $MA + MB$ nhỏ nhất hoặc $|MA - MB|$ lớn nhất

TH1: Nếu A, B cùng phía so với (P) thì $M = AB \cap (P)$

TH2: Nếu A, B khác phía so với (P) thì $M = AB' \cap (P)$ trong đó B’ là điểm đối xứng của B qua (P)

G. KHỐI ĐA DIỆN VÀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

1. Lí thuyết về khối đa diện

- Hình đa diện là hình được tạo bởi một số hữu hạn các đa giác thoả mãn:
  - Hai đa giác phân biệt chỉ có thể: Chỉ có một điểm chung hoặc chỉ có một đỉnh chung, hoặc chỉ có một cạnh chung.
  - Mỗi cạnh của đa giác nào đều là cạnh chung của đúng hai mặt.
- Khối đa diện được gọi là lồi nều với hai điểm bất kì A và B thuộc khối đa diện thi mọi điểm thuộc đoạn AB cũng thuộc khối đa diện đó.

2. Khối đa diện đều

a) Định nghĩa

Khối đa diện đều là khối đa diện lồi có hai tính chất:

- Các mặt là các đa giác đều có cùng số cạnh
- Mỗi đỉnh là đỉnh chung của cùng một số cạnh (ít nhất 3 cạnh)

Người ta phân loại khối đa diện đều: Nếu mỗi mặt có n cạnh, mỗi đỉnh là đỉnh chung của p cạnh thì khối đa diện đều đó loại $\{n,p\}$.

Chú ý: Gọi Đ, C, M là số đỉnh, số cạnh, số mặt của một khối da diện đều khi đó:

1. D-C+M=2 và 2C=nM=pD và D$=\dfrac{4n}{2n+2p-np};C=\dfrac{2np}{2n+2p-np};M=\dfrac{4p}{2n+2p-np}$ trong đó $2n+2p-np>0$ và $(n-2)(p-2)<4,\ n\ge 3,p\ge 3$,

2. Trong một khối đa diện: $C\ge 6$, $D\ge 4$, $M\ge 4$ và $2C\ge 3M\ge C+6$, $2C\ge 3D\ge C+6$

b) Các loại khối đa diện đều

Loại	Tên gọi	Số đỉnh	Số cạnh	Số mặt	Thể tích
$\{3,3\}$	Tứ diện đều	4	6	4	$V=\dfrac{a^3.\sqrt{2}}{12}$
$\{4,3\}$	Lập phương	8	12	6	$V=a^3$
$\{3,4\}$	Bát diện đều	6	12	8	$V=\dfrac{a^3.\sqrt{2}}{3}$
$\{5,3\}$	Mười hai mặt đều	20	30	12	$V=\dfrac{\left(15+7\sqrt{5}\right)a^3}{4}$
$\{3,5\}$	Hai mươi mặt đều	12	30	20	$V=\dfrac{\left(15+5\sqrt{5}\right)a^3}{12}$

c) Tâm đối xứng, mặt đối xứng của khối đa diện đều

* Tâm đối xứng: Khối lập phương, khối bát diện đều, khối mười hai mặt đều, khối hai mươi mặt đều

* Mặt đối xứng: Tứ diện đều có 6 mặt đối xứng; Khối lập phương có 9 mặt đối xứng; Khối bát điện đều có 5 mặt đối xứng; Khối mười hai mặt đều có 15 mặt đối xứng.

Chú ý:

* Tứ diện đều: Không có tâm đối xứng, có 6 mặt đối xứng, có 3 trục đối xứng;

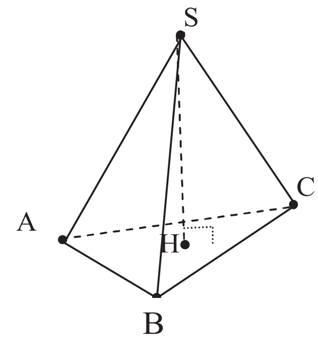
* Hình lập phương có tâm đối xứng, có 9 mặt đối xứng, có 13 trục đối xứng;

* Hình bát diện đều có tâm đối xứng, 9 mặt đối xứng và 9 trục đối xứng.

* Hình có tâm đối xứng thì có số cạnh, số mặt, số đỉnh là số chẵn.

3. Thể tích khối đa diện

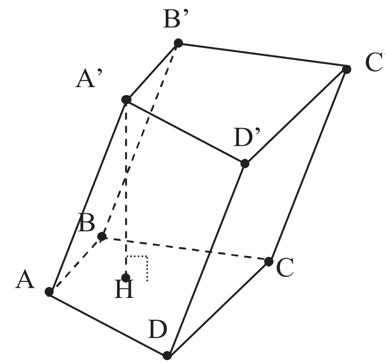
a) Thể tích



- *Thể tích khối chóp:* $\boxed{V=\frac{1}{3}B.h}$

B: Diện tích đa giác đáy.

h: Độ dài đường cao.



- *Thể tích khối lăng trụ:* $\boxed{V=B.h}$

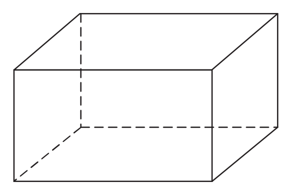
B: Diện tích đa giác đáy.

h: Độ dài đường cao.

- Thể tích hình hộp chữ nhật:

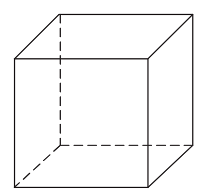
$$\boxed{V=a.b.c=\sqrt{S_1.S_2.S_3}}$$

Đường chéo: $l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$



_ Thể tích khối lập phương $\boxed{V=a^3}$

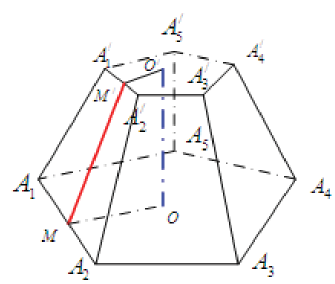
Đường chéo: $a\sqrt{3}$



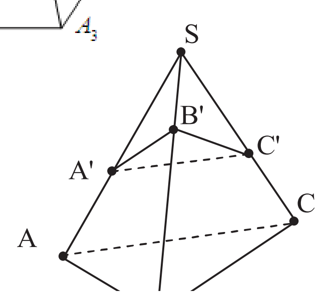
- *Thể tích khối chóp cụt:*

$$V=\frac{h}{3}\left(B+B'+\sqrt{B.B'}\right)$$

Trong đó: B, B’ là diện tích hai đáy, h là chiều cao khối chóp cụt (h=OO’)



b. Tỷ số thể tích:



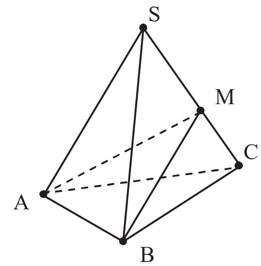
* Cho khối chóp S.ABC.

A'∈SA, B'∈SB, C'∈SC

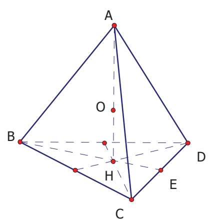
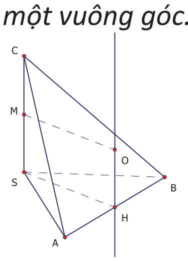
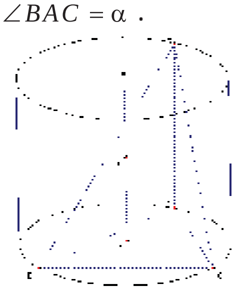
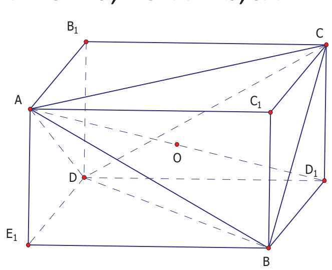
$V_{S.ABC}$ $SA.SB.SC$

* M$\in$SC, ta có:

$$\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA.SB.SM}{SA.SB.SC} = \frac{SM}{SC}$$



4. Một số công thức tính xác định nhanh tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện

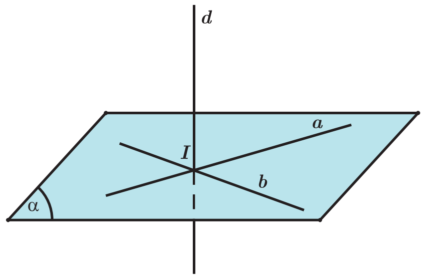
Kiểu hình	Tâm	Bán kính mặt cầu ngoại tiếp
Tứ diện đều cạnh a.  	Tâm O của mặt cầu ngoại tiếp nằm trên AH và cách (BCD) một khoảng OH=$\frac{a\sqrt{6}}{12}$	R=$\frac{a\sqrt{6}}{4}$.
Tứ diện OABC có OA=a, OB=b,OC=c và OA,OB,OC đôi một vuông góc.  	O nằm trên đường thẳng d vuông góc mp(ABC) tại trung điểm H của AB và OH=$\frac{c}{2}$.	$R = \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$
Tứ diện SABC có SA=b,SA$\perp$(ABC). BC=a cố định, A thay đổi trên mặt phẳng (ABC) sao cho $\angle BAC = \alpha$. 	Ta xét hình trụ ngoại tiếp hình chóp SABC. Khi đó tâm O của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp SABC trùng với trung điểm đoạn nối hai tâm của hình tròn đáy của hình trụ	$R = \frac{\sqrt{b^2.\sin^2\alpha + 4a^2}}{2\sin\alpha}$
Tứ diện ABCD có tính chất AB=CD=a, BC=AD=b,CA=BD=c.  	Mở rộng tứ diện ABCD thành hình hộp chữ nhật $AB_1CC_1.E_1DD_1B$ như hình vẽ. Dễ nhận ra rằng tâm O của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD chính là tâm của hình hộp chữ nhật $AB_1CC_1.E_1DD_1B$	$R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{8}}$

H. GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Phương pháp 1

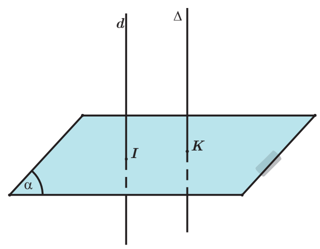
Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) ta chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau nằm trong (α).



$$\left.\begin{array}{l} d\perp a \\ d\perp b \\ a,b\subset (P) \\ a\cap b=I \end{array}\right\}\Rightarrow d\perp (P).$$

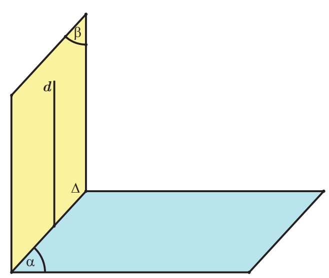
Phương pháp 2

Sử dụng tính chất: $d\,||\,\Delta$, mà $\Delta\perp(\alpha)$ thì $d\perp(\alpha)$.



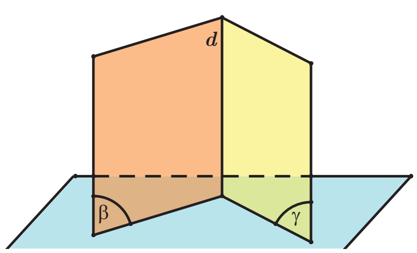
Phương pháp 3

Nếu hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến Δ, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (β) mà vuông góc với giao tuyến Δ thì vuông góc với mặt phẳng (α).



Phương pháp 4

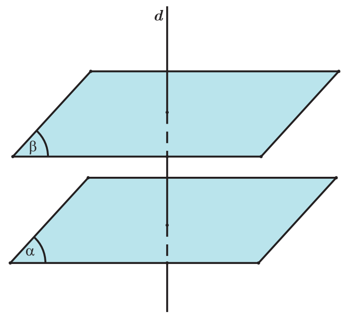
Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



$$\left.\begin{array}{l} (P)\perp (R) \\ (Q)\perp (R) \\ (P)\cap (Q)=a \end{array}\right\}\Rightarrow a\perp (R).$$

Phương pháp 5

Nếu hai mặt phẳng song song với nhau, đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng này thì nó vuông góc với mặt phẳng kia.

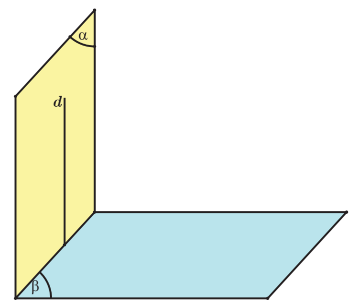


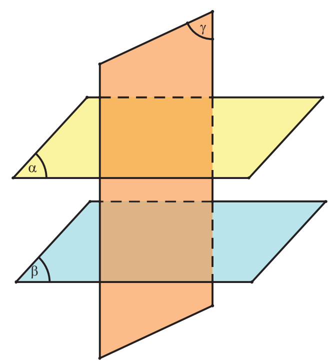
2. Hai mặt phẳng vuông góc

Phương pháp 1

Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.

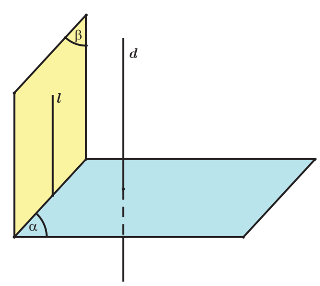
$$\left.\begin{array}{l} d\perp(\beta) \\ d\subset(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$$





Phương pháp 2

Sử dụng tính chất: $\left.\begin{array}{l} (\alpha)\parallel(\beta) \\ (\gamma)\perp(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow(\gamma)\perp(\beta)$.



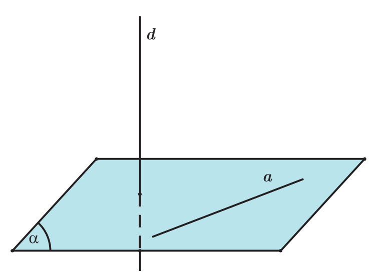
Phương pháp 3

Sử dụng tính chất $(\alpha)\perp d$, mà $d\parallel(\beta)$ hoặc $d\subset(\beta)$ thì $(\alpha)\perp(\beta)$.

3. Hai đường thẳng vuông góc

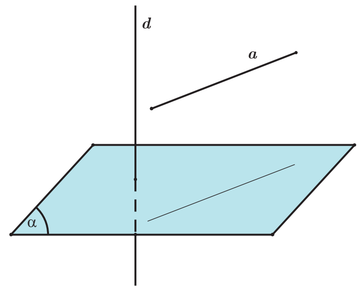
Phương pháp 1

Muốn chứng minh hai đường thẳng vuông góc với nhau ta chứng minh đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia. $\left.\begin{array}{l} d\perp(\alpha) \\ a\subset(\alpha) \end{array}\right\}\Rightarrow d\perp a$.



Phương pháp 2

Nếu đường thẳng a song song mặt phẳng (α), mà đường thẳng d vuông góc mặt phẳng (α), thì d vuông góc với đường thẳng a.



$$\left.\begin{matrix} d \perp (\alpha) \\ a \parallel (\alpha) \end{matrix}\right\} \Rightarrow d \perp a.$$

4. Góc

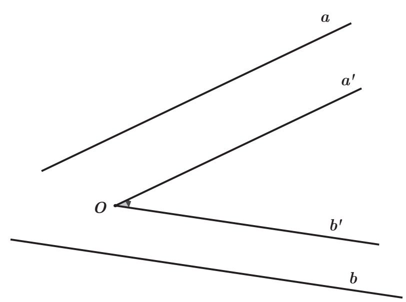
4.1 Góc giữa hai đường thẳng

Phương pháp

Bước 1: Tìm một điểm O tùy ý (có thể lấy trên đường thẳng a hoặc b). Từ O dựng hai tia Oa' và Ob' lần lượt song song với a và b được góc $\widehat{a'Ob'} = \varphi$.

Bước 2. Tính số đo của góc φ bằng các định lý và tính chất của hình học phẳng hay định lý côsin.

Chú ý: góc giữa hai đường thẳng không lớn hơn 90^0.



4.2 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp

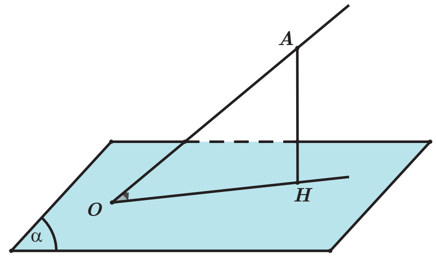
Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta thực hiện như sau:

Bước 1: Xác định hình chiếu vuông góc của d xuống mặt phẳng (α) là d'.

+ Tìm giao điểm $O = d \cap (\alpha)$.

+ Dựng hình chiếu vuông góc của A xuống (α) là H (chọn đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α)).

Bước 2: Góc giữa đường thẳng d và d' là góc đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tính số đo của góc đó bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông.



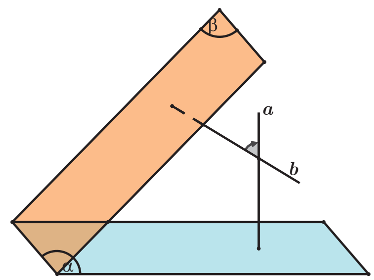
4.3 Góc giữa hai mặt phẳng

Để xác định góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β) ta làm như sau:

Phương pháp 1

Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).

$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{array}\right\}\Rightarrow \widehat{(a,b)}=\widehat{\left((\alpha),(\beta)\right)}.$$

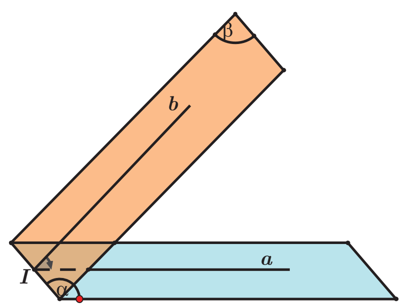


Phương pháp 2

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Lấy điểm $I\in\Delta$.Trong (α) dựng $a\perp\Delta$ tại I. Trong (β) dựng $b\perp\Delta$ tại I.

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



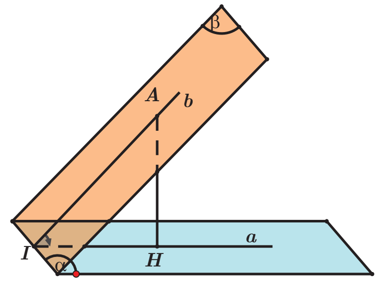
Phương pháp 3

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Trong (β) lấy điểm A. Dựng hình chiếu H của A xuống mặt phẳng (α).

Từ H dựng $HI\perp\Delta$.

Khi đó góc $\widehat{AHI}$ là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



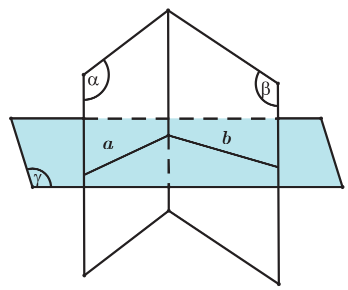
Phương pháp 4

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Chọn mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$.

Tìm các giao tuyến $a = (\gamma) \cap (\alpha)$, $b = (\gamma) \cap (\beta)$.

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



Phương pháp 5 Sử dụng công thức diện tích hình chiếu $S' = S\cos\varphi$.

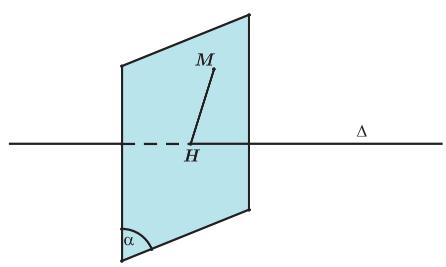
5. Khoảng cách

5.1 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Để tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ta cần xác định được hình chiếu H của điểm M trên đường thẳng Δ. Điểm H thường được dựng theo hai cách sau:

- Trong mặt phẳng (M, Δ) vẽ $MH \perp \Delta$. Khi đó: $d(M, \Delta) = MH$.

- Dựng mặt phẳng (α) qua M và vuông góc với Δ tại H. Khi đó: $d(M, \Delta) = MH$.



5.2 Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

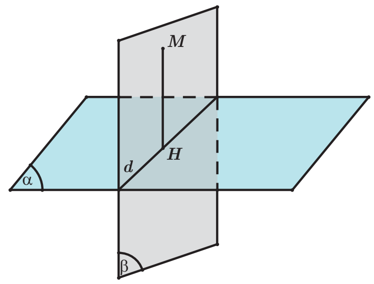
Cho điểm M và mặt phẳng (α). Gọi H là hình chiếu của M xuống (α). Khi đó MH được gọi là khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α).

Phương pháp 1

Bước 1: Chọn mặt phẳng (β) qua M và vuông góc với (α).

Bước 2: Xác định giao tuyến $d = (\alpha) \cap (\beta)$.

Bước 3: Trong mặt phẳng (β) kẻ $MH \perp d$. Vậy $MH = d(M,(\alpha))$.

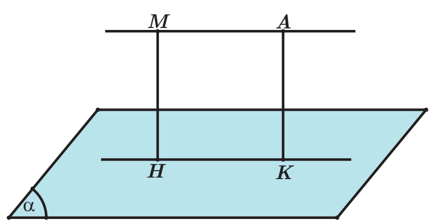


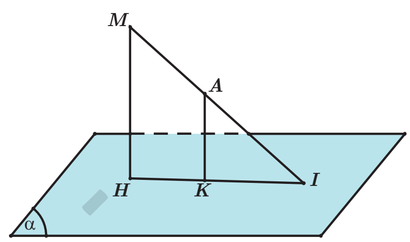
Phương pháp 2

Giả sử đã biết $d(A,(\alpha))$, IM và IA.

- Nếu $AM \parallel (\alpha)$ thì $d(M,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$.

- Nếu AM cắt (α) tại I thì $\dfrac{d(M,(\alpha))}{d(A,(\alpha))} = \dfrac{IM}{IA}$.



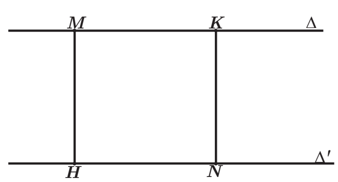


5.3 Khoảng cách giữa hai đường thẳng

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ':

- Nếu Δ và Δ' cắt nhau hoặc trùng nhau thì $d(\Delta,\Delta') = 0$.

- Nếu Δ và Δ' song song với nhau thì $d(\Delta,\Delta') = d(M,\Delta') = d(N,\Delta)$

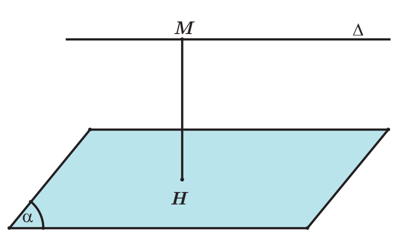


5.4 Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và (α):

- Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha)) = 0$.

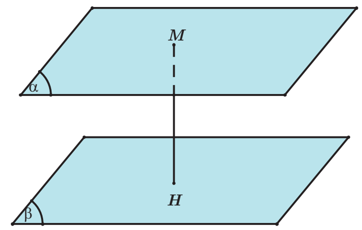
- Nếu $\Delta \parallel (\alpha)$ thì $d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha))$.



5.5 Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

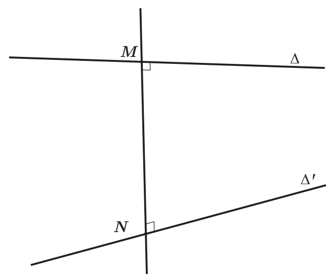
- Nếu (α) cắt (β) hoặc $(\alpha)\equiv(\beta)$ thì $d((\alpha),(\beta))=0$.
- Nếu $(\alpha)\|(\beta)$ thì $d((\alpha),(\beta))=d(M,(\beta))$.



5.6 Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

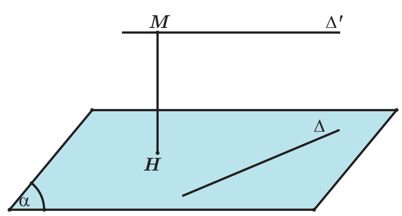
Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' là đường thẳng a cắt Δở M và cắt Δ' ở N đồng thời vuông góc với cả Δvà Δ'.

Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δvà Δ'.



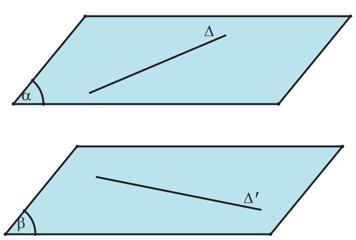
Phương pháp 1

Chọn mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'. Khi đó $d(\Delta,\Delta')=d(\Delta',(\alpha))$.



Phương pháp 2

Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.

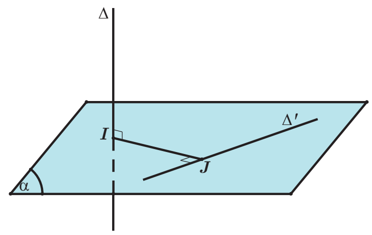


Phương pháp 3 Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Trường hợp 1: Δ và Δ' vừa chéo nhau vừa vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và vuông góc với Δtại I.

Khi đó IJ là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=IJ$.



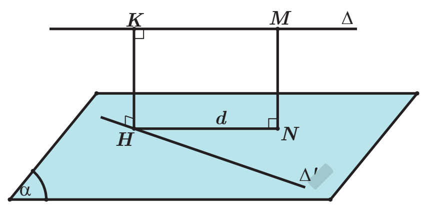
Trường hợp 2: Δ và Δ' chéo nhau mà không vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

Bước 2: Dựng d là hình chiếu vuông góc của Δ xuống (α) bằng cách lấy điểm $M\in\Delta$ dựng đoạn $MN\perp(\alpha)$, lúc đó d là đường thẳng đi qua N và song song với Δ.

Bước 3: Gọi $H=d\cap\Delta'$, dựng $HK \parallel MN$

Khi đó HK là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=HK=MN$.



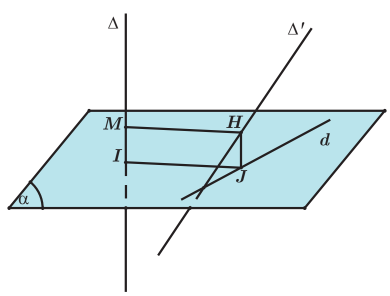
Hoặc

Bước 1: Chọn mặt phẳng $(\alpha)\perp\Delta$ tại I.

Bước 2: Tìm hình chiếu d của Δ' xuống mặt phẳng (α).

Bước 3: Trong mặt phẳng (α), dựng $IJ\perp d$, từ J dựng đường thẳng song song với Δ cắt Δ' tại H, từ H dựng $HM \parallel IJ$.

Khi đó HM là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta')=HM=IJ$.



6. Bài toán khác

DẠNG 1: ***Thiết diện tạo bởi mặt phẳng đi qua một điểm và vuông góc với một đường thẳng d cho trước***

Cách xác định mp(α) đi qua điểm A và vuông góc với đường thẳng d:

Cách 1:

+ Kẻ đường thẳng a qua A và vuông góc với d.

Khi đó, mp(a,b) chính là mp(α) cần dựng.

Cách 2: Nếu có d vuông góc với (P). Dựng (α) qua A và $(\alpha)//(P)$

DẠNG 2: ***Thiết diện tạo bởi mặt phẳng chứa một đường thẳng và vuông góc một mặt phẳng cho trước.***

Cách xác định mp(α) chứa đường thẳng a và vuông góc với đường thẳng mp(β) trong đó ($a \perp mp(\beta)$):

+ Chọn một điểm A trên đường thẳng a.

+ Kẻ đường thẳng qua A và vuông góc với mp(β).

Khi đó, mp(a,b) chính là mp(α) cần dựng.

Kết quả:

+ Nếu một đường thẳng và một mp cùng vuông góc với một đường thẳng (đường thẳng không nằm trong mặt phẳng) thì song song.

+ Nếu một đường thẳng và một mp cùng vuông góc với mặt phẳng (đường thẳng không nằm trong mặt phẳng thì song song.

DẠNG 3: ***Dựng một đường thẳng d qua một điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P)***

Cách 1: Nếu có $a \perp (P)$: Dựng d song song với a. Khi đó $d \perp (P)$

Cách 2:

+ Dựng mặt phẳng (Q) qua điểm A và $(Q) \perp (P)$;

+ Tìm giao tuyến b của (P) và (Q);

+ Từ điểm A dựng đường thẳng d vuông góc với b.

Khi đó: d là đường thẳng cần dựng

DẠNG 4: ***Chọn một mặt phẳng qua điểm A và vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước***

Cách 1: Nếu đã có một đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b trong (P).

Từ một điểm M nào đó trên a, kẻ một đường thẳng MH vuông góc với b.

Khi đó: mp(a,H) chính là mặt phẳng cần dựng.

Cách 2: Nếu biết mặt phẳng (Q) vuông góc với (P).

Từ điểm A kẻ lần lượt hai đường thẳng song song với hai đường thẳng cắt nhau trong (P).

DẠNG 5: ***Tìm hình chiếu H của điểm M lên mặt phẳng (P)***

Quy tắc chung:

+ Điểm thuộc mặt phẳng thì hình chiếu của điểm đó lên mặt phẳng là chính nó;

+ Điểm không thuộc mặt phẳng:

- Dựng một đường thẳng d qua điểm A và vuông góc với (P); - DẠNG 3

- Tìm giao điểm củaH của d và mặt phẳng (P). Khi đó, H chính là hình chiếu của điểm A lên (P)

DẠNG 6: ***Tìm hình chiếu của đường thẳng d (không vuông góc với (P)) lên mặt phẳng (P).***

Cách 1:

Chọn trên d hai điểm A & B. (nếu d cắt (P) nên chọn 1 điểm là giao của d và (P))

+ Tìm hình chiếu A', B' lần lượt của A, B lên (P).

+ Đường thẳng d' qua A', B' chính là hình chiếu của d lên (P)

Cách 2:

+ Chọn mặt phẳng (Q) chứa d và $\left(Q\right)\perp(\mathrm{P})$;

+ Khi đó, giao tuyến d' của (P) và (Q) chính là hình chiếu của d lên (P).

DẠNG 7: ***Tỉ số khoảng cách***

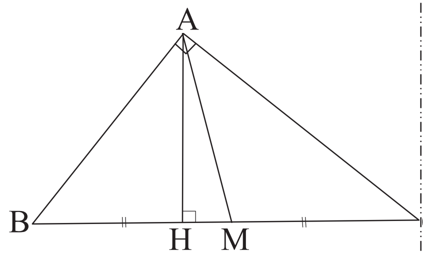
+ Nếu đường thẳng AB cắt (P) tại M thì: $\frac{d(A,(P))}{d(\mathrm{B},(P))}=\frac{AM}{BM}$

+ Nếu AB song song với (P) thì $d(A,(P))=d(\mathrm{B},(P))$.

I. MỘT SỐ KIẾN THỨC BỔ SUNG

1/ *Các hệ thức lượng trong tam giác vuông*

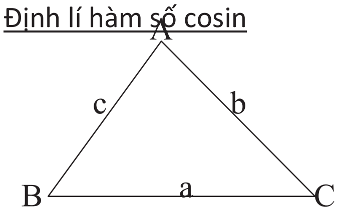
Cho ΔABC vuông tại A, AH là đường cao, AM là đường trung tuyến. Ta có:



- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$, $S_{\Delta ABC} = p.r$
- $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$
- $AM = \frac{BC}{2}$

2/ *Các hệ thức lượng trong tam giác thường*

a) Định lí hàm số cosin

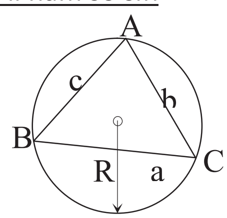


$*$ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Rightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$*$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

$*$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

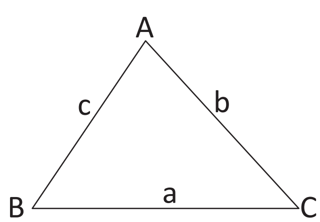
b) Định lí hàm số sin



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

c) Công thức tính diện tích của tam giác

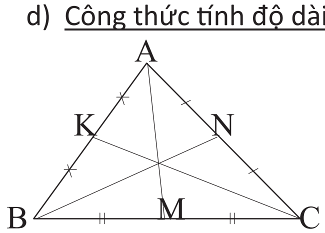


p – nửa chu vi

r – bán kính đường tròn

- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$
- $S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$, $S_{\Delta ABC} = p.r$
- $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $\left(p = \frac{a+b+c}{2}\right)$

d) Công thức tính độ dài đường trung tuyến của tam giác

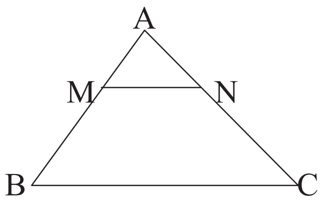


$*$ $AM^2 = \frac{AB^2+AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$.

$*$ $BN^2 = \frac{BA^2+BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}$.

$*$ $CK^2 = \frac{CA^2+CB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$.

3/ *Định lí Talet*



$$* \ MN//BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$$

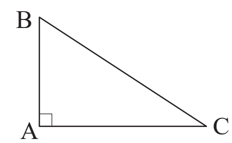
$$* \ \frac{S_{\Delta AMN}}{S_{\Delta ABC}} = \left(\frac{AM}{AB}\right)^2 = k^2$$

(Tỉ diện tích bằng tỉ bình phương đồng dạng)

4/ *Diện tích của đa giác*

a/ *Diện tích tam giác vuông*

✧ Diện tích tam giác vuông bằng ½ tích 2 cạnh góc vuông.

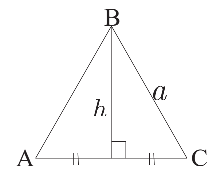


$$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB.AC$$

b/ *Diện tích tam giác đều*

✧ Diện tích tam giác đều: $S\Delta = \dfrac{canh^2\sqrt{3}}{4}$

✧ Chiều cao tam giác đều: $h_\Delta = \dfrac{canh.\sqrt{3}}{2}$



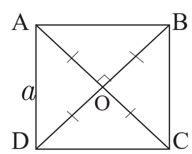
$$\Rightarrow \begin{cases} S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \\ h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

c/ *Diện tích hình vuông và hình chữ nhật*

✧ Diện tích hình vuông bằng cạnh bình phương.

✧ Đường chéo hình vuông bằng cạnh nhân $\sqrt{2}$.

✧ Diện tích hình chữ nhật bằng dài nhân rộng.

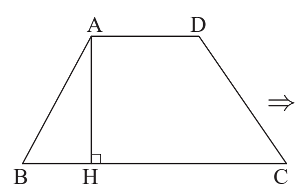


$$\Rightarrow \begin{cases} S_{HV} = a^2 \\ AC = BD = a\sqrt{2} \end{cases}$$

d/ *Diện tích hình thang*

✧ Diện tích hình thang:

$S_{\text{Hình Thang}} = \dfrac{1}{2}$.(đáy lớn + đáy bé) x chiều cao

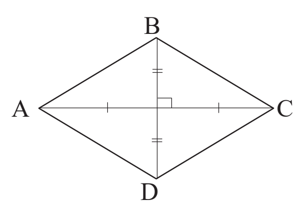


$$\Rightarrow S = \frac{(AD + BC).AH}{2}$$

e/ *Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc*

✧ Diện tích tứ giác có hai đường chéo vuông góc nhau bằng ½ tích hai đường chéo.

✧ Hình thoi có hai đường chéo vuông góc nhau tại trung điểm của mỗi đường.



$$\Rightarrow S_{H.Thoi} = \frac{1}{2} AC.BD$$

Lưu ý: Trong tính toán diện tích, ta có thể chia đa giác thành những hình đơn giản dễ tính diện tích, sau đó cộng các diện tích được chia này, ta được diện tích đa giác.

5. Một số phép biến đổi đồ thị

1. Các phép biến đổi đơn giản.

a. Hai điểm $M\left(x;\ y\right)$ và $M'\left(x;-y\right)$ đối xứng với nhau qua trục hoành .

b. Hai điểm $M\left(x;\ y\right)$ và $M'\left(-x;\ y\right)$ đối xứng với nhau qua trục tung .

c. Hai điểm $M\left(x;\ y\right)$ và $M'\left(-x;-y\right)$ đối xứng với nhau qua gốc toạ độ *O* .

Từ các phép biến đổi đơn giản này ta có.

2. Các phép biến đổi đồ thị.

a. Đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=-f\left(x\right)$ đối xứng với nhau qua trục hoành.

b. Đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=f\left(-x\right)$ đối xứng với nhau qua trục tung.

c. Đồ thị của hai hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=-f\left(-x\right)$ đối xứng với nhau qua gốc tọa độ *O*.

Hệ quả 1. *Đồ thị hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.*

Hệ quả 2. *Đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.*

Từ các kết quả trên ta có các dạng cơ bản về đồ thị của hàm số có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

3. Các dạng cơ bản

Dạng 1. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=f\left(x\right)$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*G*) *của hàm số* $y=\left|f\left(x\right)\right|$

Lời giải. Ta có $y=\left|f\left(x\right)\right|=\begin{cases} f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)\ge 0 \\ -f\left(x\right) & \text{khi } f\left(x\right)<0 \end{cases}$

Suy ra $\left(G\right)=\left(C_1\right)\cup\left(C_2\right)$ với $\left(C_1\right)$ là phần đồ thị (*C*) nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(C)}\ge 0\right)$, còn $\left(C_2\right)$ là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*C*) nằm phía dưới trục hoành $\left(y_{(C)}<0\right)$

Dạng 2. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=f\left(x\right)$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*H*) *của hàm số* $y=f\left(\left|x\right|\right)$

Lời giải. Vì $\left|-x\right|=\left|x\right|$ nên $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị (*H*) nhận trục tung làm trục đối xứng. Vì vậy $(H)=\left(C_3\right)\cup\left(C_4\right)$ với $\left(C_3\right)$ là phần đồ thị của (*C*) nằm bên phải trục tung $\left(x\ge 0\right)$, còn $\left(C_4\right)$ là phần đối xứng của $\left(C_3\right)$ qua trục tung.

Dạng 3. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=f\left(x\right)$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*K*) *của hàm số* $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|$

Lời giải. Ta có $y=\left|f\left(\left|x\right|\right)\right|=\begin{cases} f\left(\left|x\right|\right) & \text{khi } f\left(\left|x\right|\right)\ge 0 \\ -f\left(\left|x\right|\right) & \text{khi } f\left(\left|x\right|\right)<0 \end{cases}$

Suy ra $(K)=\left(H_1\right)\cup\left(H_2\right)$ với $\left(H_1\right)$ là phần đồ thị của (*H*) của hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(H)}\ge 0\right)$, còn $\left(H_2\right)$ là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*H*) ở phía dưới trục hoành $\left(y_{(H)}<0\right)$.

Dạng 4. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=\dfrac{u\left(x\right)}{v\left(x\right)}$, *suy ra cách vẽ đồ thị (L) của hàm số* $y=\dfrac{\left|u\left(x\right)\right|}{v\left(x\right)}$

Lời giải. $y=\dfrac{|u(x)|}{v(x)}=\begin{cases}\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } u(x)\ge 0\\ -\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } u(x)<0\end{cases}$

Suy ra $(L)=(C_1)\cup(C_2)$ với (C_1) là phần của đồ thị (*C*) có hoành độ thỏa mãn điều kiện $u(x)\ge 0$ và (C_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*C*) có hoành độ thỏa mãn $u(x)<0$.

Dạng 5. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*M*) *của hàm số* $y=\dfrac{u(x)}{|v(x)|}$.

Lời giải. $y=\dfrac{u(x)}{|v(x)|}=\begin{cases}\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } v(x)>0\\ -\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } v(x)<0\end{cases}$

Suy ra $(M)=(C_3)\cup(C_4)$ với (C_3) là phần của đồ thị (*C*) có hoành độ thỏa mãn điều kiện $v(x)>0$ và (C_4) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*C*) có hoành độ thỏa mãn $v(x)<0$.

Dạng 6. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*N*) *của hàm số* $y=\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right|$.

Lời giải. $y=\left|\dfrac{u(x)}{v(x)}\right|=\begin{cases}\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } \dfrac{u(x)}{v(x)}\ge 0\\ -\dfrac{u(x)}{v(x)} & \text{khi } \dfrac{u(x)}{v(x)}<0\end{cases}$

Suy ra $(N)=(C_5)\cup(C_6)$ với (C_5) là phần của đồ thị (*C*) nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(C)}\ge 0\right)$ và (C_6) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*C*) nằm phía dưới trục hoành $\left(y_{(C)}<0\right)$.

Dạng 7. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*Q*) *của hàm số* $y=\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}$.

Lời giải. Vì $|-x|=|x|$ nên $y=\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị (*Q*) nhận trục tung làm trục đối xứng. Vì vậy $(Q)=(C_7)\cup(C_8)$ với (C_7) là phần đồ thị của (*C*) nằm bên phải trục tung $(x\ge 0)$, còn (C_8) là phần đối xứng của (C_7) qua trục tung.

Dạng 8. *Từ đồ thị* (*C*) *của hàm số* $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, *suy ra cách vẽ đồ thị* (*R*) *của hàm số* $y=\left|\dfrac{u(|x|)}{v(|x|)}\right|$

Lời giải. $y=\left|\frac{u(|x|)}{v(|x|)}\right|=\begin{cases}\frac{u(|x|)}{v(|x|)} & \text{khi } \frac{u(|x|)}{v(|x|)}\ge 0\\ -\frac{u(|x|)}{v(|x|)} & \text{khi } \frac{u(|x|)}{v(|x|)}<0\end{cases}$

Suy ra $(R)=(Q_1)\cup(Q_2)$ với (Q_1) là phần đồ thị (*Q*) của hàm số $y=\frac{u(|x|)}{v(|x|)}$ nằm phía trên trục hoành $\left(y_{(Q)}\ge 0\right)$, còn (Q_2) là phần đối xứng qua trục hoành của phần đồ thị (*Q*) ở phía dưới trục hoành $\left(y_{(Q)}<0\right)$.

6. Công thức đạo hàm

6.1. Các quy tắc tính đạo hàm (Ký hiệu U=U(x), V=V(x)).

• $(U\pm V)'=U'\pm V'$ • $(UV)'=U'V+UV'$ • $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'.V-U.V'}{V^2}$ • $\{f[U(x)]\}_x'=f'_u\,.\,U'_x$

• $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ • $(kU)'=k.U'$ • $\left(\frac{1}{U}\right)'=-\frac{U'}{U^2}$ • $(UVW)'=U'VW+UV'W+UVW'$

6.2. Các công thức tính đạo hàm:

Tên hàm số	Công thức đạo hàm	Đạo hàm của hàm số hợp
Các hàm số thường gặp	$(C)'=0$ (C là hằng số)	
	$(x)'=1$, $(kx)'=k$ (k là hằng số)	$\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{n}{u^{n+1}}.u'$ $u\ne 0$
	$(x^n)'=n.x^{n-1}$ ($n\in N$, $n\ge 2$)	$(u^\alpha)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$
	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ ($x\ne 0$) $\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{n}{x^{n+1}}$ ($x\ne 0$)	$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{u'}{u^2}$ $(u\ne 0)$ $\left(\frac{1}{u^n}\right)'=-\frac{n}{u^{n+1}}.u'$ $(u\ne 0)$
	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (x>0) $(\sqrt[n]{x})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(x>0)$	$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $(u>0)$ $(\sqrt[n]{u})'=\frac{1}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}.u'$ $(u>0)$
Hàm số lượng giác	$(\sin x)'=\cos x$ $(\cos x)'=-\sin x$ $(tanx)'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$ $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\cot^2 x)$	$(\sin u)'=\cos u.u'$ $(\cos u)'=-\sin u.u'$ $(\tan u)'=\frac{1}{\cos^2 u}.u'$ $(\cot u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}.u'$
Hàm lũy thừa	$(x^\alpha)'=\alpha\, x^{\alpha-1}$	$(u^\alpha)'=\alpha\, u^{\alpha-1}u'$

Hàm số mũ	$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x\ln a$	$(e^u)' = u'.e^u$ $(a^u)' = u'.a^u.\ln a$
Hàm logarít	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ (x>0) $(\ln \lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$ (x≠0) $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$ (x>0, 0<a≠1) $(\log_a \lvert x\rvert)' = \frac{1}{x\ln a}$ (x>0, 0<a≠1)	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (u>0) $(\ln \lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u}$ (u≠0) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u\ln a}$ (u>0, 0<a≠0) $(\log_a \lvert u\rvert)' = \frac{u'}{u\ln a}$ (u>0, 0<a≠0)

6.3. Đạo hàm cấp cao: $f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x) \right]'$

Tặng các con trai, em trai, các cháu của tôi!

Hà Nội, ngày 06 tháng 4 năm 2017